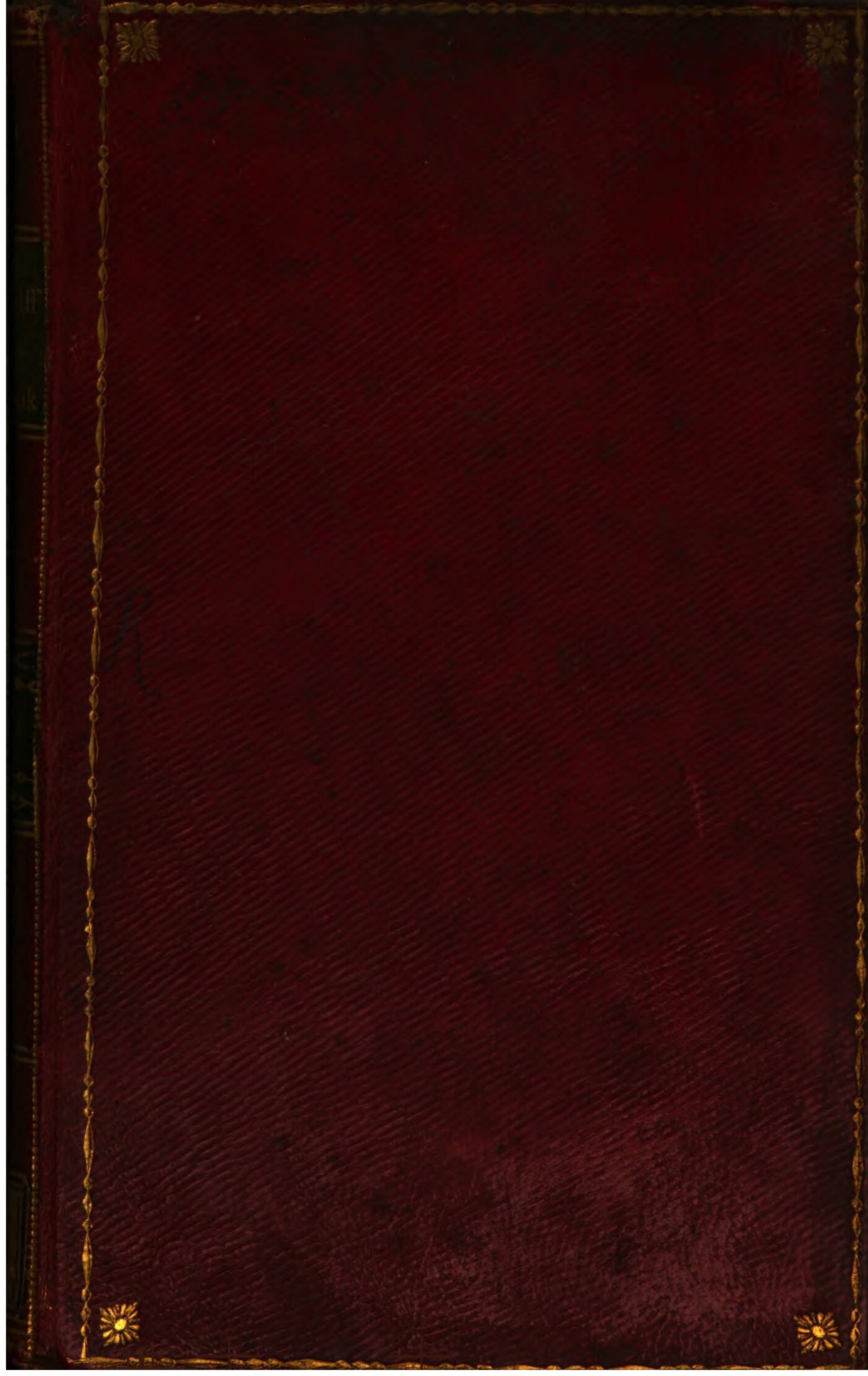
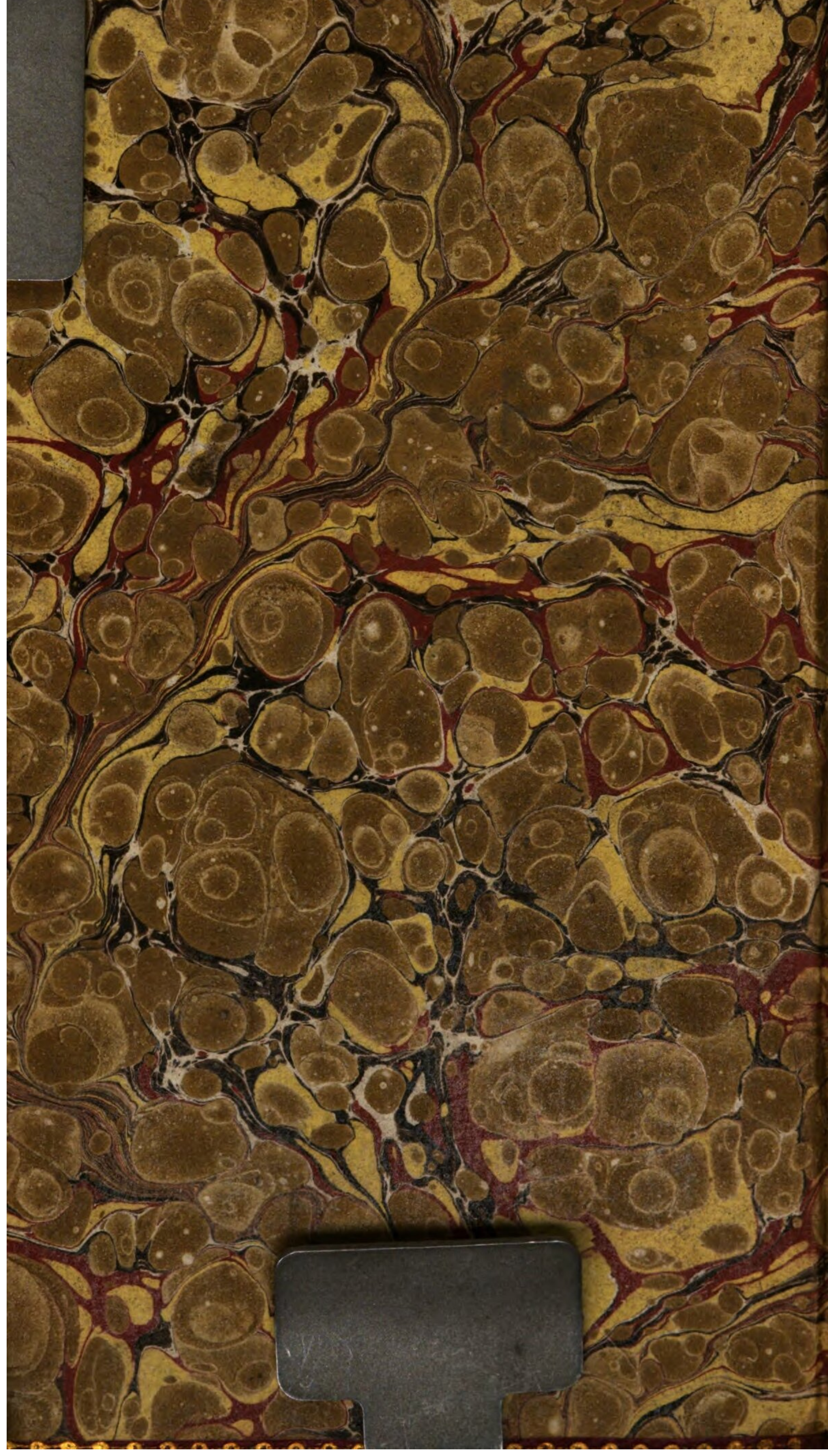
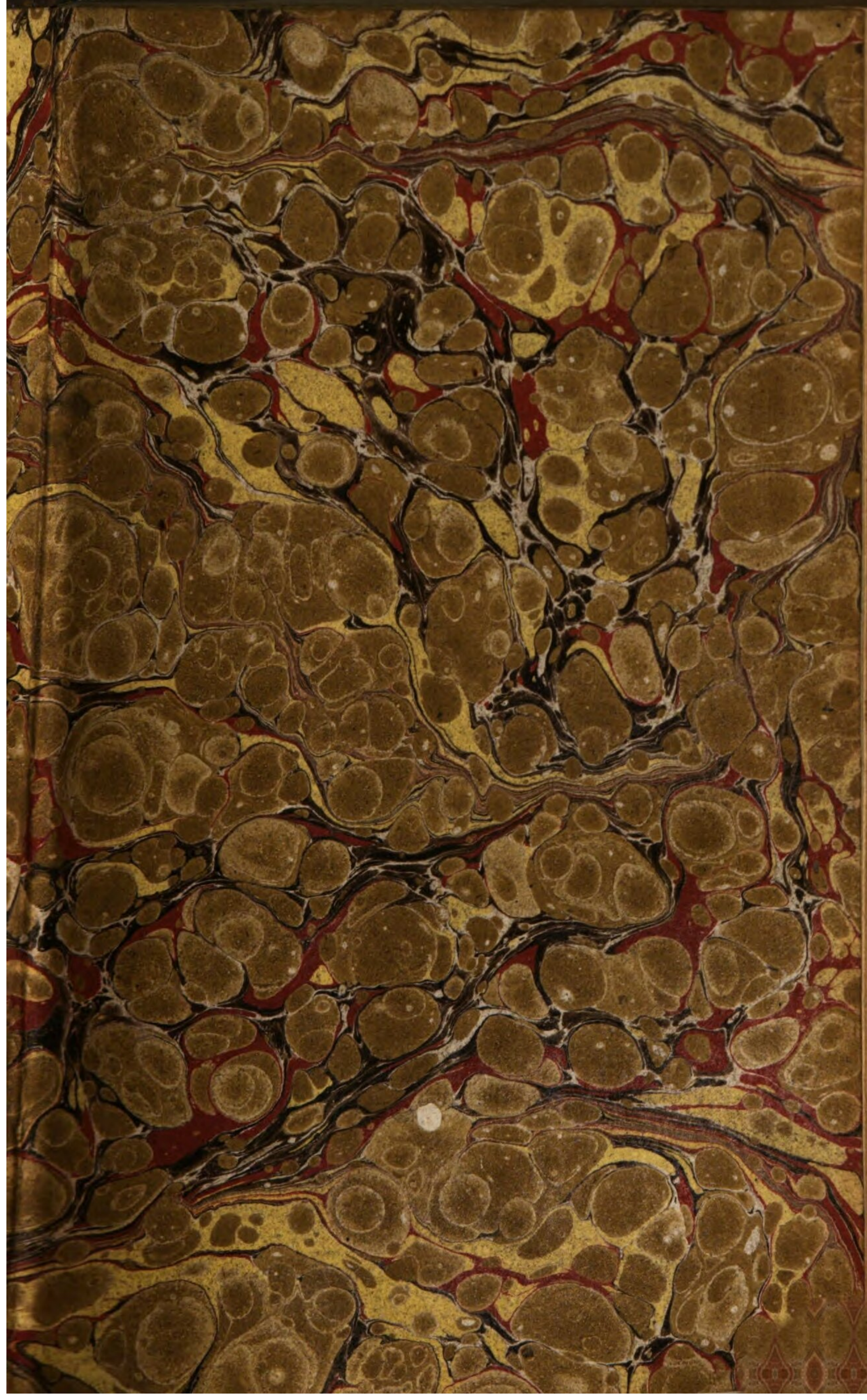








Gesamt des Buchstabs an die P. Akademie
in Kopenhagen.

Math. P. 205

Mathesis. Systemata & methodi: 149.

R

L e h r b e g r i f f

der reinen

M A T H E M A T I K

z u m

akademischen Gebrauche ausgearbeitet

v o n

Johann Karl Friedrich Hauff.

München
Staatsbibliothek
Bayerische

Ersten Theils erster Band.

Elementargeometrie.

Mit fünf Kupfertafeln.

Frankfurt am Main,

bey Philipp Heinrich Guilhauman.

1 8 0 3.

Lehrbegriff

der reinen

MATHEMATIK

von

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Bayerische
Staatsbibliothek
München

ersten Theils erster Band.

von Leonhard Euler

in der Kupferstecherei

Frankfurt am Main

bei Philipp Heinrich Goldmann

1803

V o r r e d e.

Das Werk, dessen ersten Band ich hier dem Publikum übergebe, soll ein vollständiger Lehrbegriff der reinen Mathematik, nach der jetzigen Lage dieser Wissenschaft, werden, dessen einzelne Theile als Lehrbücher sowohl bey dem akademischen Vortrage zum Grunde gelegt, als auch zur Selbstbelehrung des zum Denken gewöhnten und einigermaßen vorbereiteten Anfängers gebraucht werden können. Dafs ich die Ge-
seze, welche der Verfasser eines solchen Werks in Hinsicht auf Form und Materie zu beobachten hat, auf das genaueste zu erfüllen mich sorgfältig bestrebt habe, werden Kenner bald finden; wie weit dieses Bestreben mir gelungen sey, mögen sie dem Publikum sagen. Was ich ihrer Prüfung vorzüglich empfehlen will, ist die Abhandlung der Lehre vom Kreise, und die darauf zurückgeführte Parallelen-
theorie.

Dafs ich überall die Besten meiner Vorgänger zu benutzen suchte, war meine Schuldigkeit. Zum grössten Danke bekenne ich mich diesfalls den Herren Lorenz, Schulz und Gilbert verpflichtet. Das, was mir etwa ausschliessend eigen seyn möchte, hier besonders auszuzeichnen, halte ich um desto weniger für nöthig, da, hoffentlich, das ganze Buch zeigen wird, dafs ich auch das von Andern Erborgte mir erst angeeignet habe, ehe ich es wieder gab.

Die Fehler, welche sich in dem Buche sowohl, als in den Kupfertafeln finden, mufs ich mit meiner Entfernung vom Druckorte zu entschuldigen bitten. Die erheblichsten Verbesserungen habe ich am Ende angehängt. Den Sinn entstellende Druckfehler sind mir wenige vorgekommen. Unter denen, welche den Leser aufhalten könnten, mufs ich hier auf einen deswegen besonders aufmerksam machen, weil er sonst in mathematischen Schriften gar nicht vorkommt, und daher leicht, auch geübten Lesern, wenigstens im Anfange, Anstofs verursachen dürfte. Dieser besteht nämlich darin, dafs der Setzer sehr oft zwei oder drei Buchstaben, welche eine Linie oder einen Winkel bezeichnen, und als solche, zusammen ein untheilbares Zeichen ausmachen, am Ende der Zeile nach Willkühr zu trennen sich erlaubt hat. So steht z. B.

S. 104. Z. 2. v. u. - - - - A D

H statt A D H.

- - Z. 3. u. 4. v. u. - - - E A

D statt E A D.

- - Z. 5. v. u. - - - G

A D statt G A D.

- - Z. 7. v. u. - - - C

A statt C A. u. s. w.

Eben so steht:

- 112. Z. 6. v. o. - - - 2

R statt 2 R,

und der nämliche Fehler findet sich auch an andern Orten mehr.

Marburg am 24sten October

1802.

Der Verfasser.

T A F E L

der mathematischen Zeichen.

Begriff.	Zeichen.	Gebrauch.
Gleichheit	$=$	$A = B$, d. i. die Gröſſe A ist der B gleich.
Ungleichheit	$\neq$	$A \neq B$, d. i. A und B sind ungleich.
Aehnlichkeit.	$\sim$	$A \sim B$, d. i. die A ist der B ähnlich.
Congruenz.	$\equiv$	$A \equiv B$, d. i. die A ist der B congruent.
Das Größere.	$>$	$A > B$, d. i. die A ist größer als die B.
Das Kleinere.	$<$	$A < B$, d. i. die A ist kleiner, als die B.
Addition.	$+$	$A + B$, d. i. A und B zusammen.
Subtraction.	$-$	$A - B$, d. i. A weniger B.
Multiplication	$\times$ oder $(.)$	$A \times B$, oder $A.B$, d. i. A multiplicirt mit B.
Division.	$\frac{\quad}{\quad}$	$\frac{A}{B}$ d. i. A dividirt durch B.
Rechter Winkel.	R.	$ABC = R$, d. i. A B C ist ein rechter Winkel.
Stumpfer Winkel.	$> R$	$ABC > R$, d. i. A B C ist ein stumpfer Winkel.
Spitzer Winkel.	$< R$	$ABC < R$, d. i. A B C ist ein spitzer Winkel.
Parallelismus.	$\parallel$	$AB \parallel CD$, d. i. die A B ist der C D parallel.
Quadrat.	$\text{—}^q \text{—}$ oder $\text{—}^2 \text{—}$	A^2 , d. i. das Quadrat von A B.
Würfel.	$\text{—}^c \text{—}$ oder $\text{—}^3 \text{—}$	A^3 , d. i. der Würfel von A B.
Verhältniß.	$(:)$	$A : B$, d. i. A verhält sich zu B.
Zweymal höheres Verhältniß.	$\text{—}^2 \text{—}^2$:	$A^2 : B^2$, d. i. das zweymal höhere Verhältniß der Gröſſe A B zu der C D.
Dreymal höheres Verhältniß.	$\text{—}^3 \text{—}^3$:	$A^3 : B^3$, d. i. das dreymal höhere Verhältniß der Gröſſe A B zu der C D.
Rechteck aus zwey Linien.	$\text{—} \times \text{—}$	$AB \times CD$, d. i. das Rechteck aus A B und C D.

Einleitung

I. Erkenntnißart der Mathematik.

§. 1.

Die mathematische Erkenntniß unterscheidet sich von der philosophischen dadurch, daß die erste intuitiv, d. h. Vernunfterkennntniß aus der Construction der Begriffe, oder Erkenntniß durch Vernunftschlüsse aus der Construction der Begriffe; die letzte hingegen discursiv, a) d. h. Vernunfterkennntniß aus Begriffen, oder Erkenntniß durch Vernunftschlüsse aus bloßen Begriffen ist.

§. 2. Einen Begriff construiren heißt, die ihm entsprechende Anschauung *a priori* darstellen.

a) Von *discursus*, was in der Sprache der älteren Logik mit *ratiocinium* gleichbedeutend ist.

§. 3. Unter einer Anschauung (*intuitus*) versteht man eine einzelne Vorstellung, die sich auf einen Gegenstand unmittelbar bezieht, und wodurch dieser gegeben wird, oder: die Vorstellung von einem Individuum, z. B. die Vorstellung von dem regelmässigen Sechsecke, von der Archimedischen Spirallinie, der Apollonischen Parabel, von dem Orion, dem grossen Bären, der Milchstrasse am Himmel u. d. m.

Daher die Benennung: *Intuitiv*.

§. 4. Der Anschauung steht entgegen der Begriff (*conceptus*), welcher eine allgemeine Vorstellung ist, die sich nur vermittelt ihrer — angeschaueten oder gedachten — Merkmale auf Gegenstände bezieht, und daher durch mehr als einen Gegenstand gegeben werden kann; z. B. die Vorstellung von einem Vielecke, einer krummen Linie, einem Sternbilde u. d. m. *b)*

b) Anschauungen und Begriffe lassen sich auch kurz so von einander unterscheiden: wenn in einer Vorstellung und deren Bewusstseyn Vieles enthalten ist, so hat man eine Anschauung; wenn hingegen in vielen

Anschaungen und Begriffe sind die Elemente aller Erkenntnißs.

§. 5. Die Mathematik betrachtet also das Allgemeine im Besondern, ja gar im Einzelnen, doch gleichwohl *a priori* und vermittelt der Vernunft, so, daß, wie dieses Einzelne unter gewissen allgemeinen Bedingungen der Construction bestimmt ist, eben so der Gegenstand des Begriffs, dem dieses Einzelne nur als sein Schema entspricht, allgemein bestimmt gedacht werden muß. Die Philosophie hingegen muß sich auf die Betrachtung des Besonderen im Allgemeinen einschränken. Wenn gleich daher die Philosophie und die Mathematik einerlei Gegenstand in Untersuchung nehmen; so ist doch die Art, ihn durch die Vernunft zu behandeln, ganz anders in der philosophischen als in der mathematischen Betrachtung. Jene hält sich blos an allgemeine Begriffe; diese kann mit bloßen Begriffen nichts ausrichten, sondern eilt so-

Vorstellungen ein und dasselbe Bewußtseyn ganz enthalten ist, so hat man einen Begriff.

gleich zur Anschauung, in welcher sie den Begriff *in concreto* betrachtet, aber doch nicht empirisch, sondern in einer Anschauung, die sie *a priori* darstellt, und in welcher dasjenige, was aus den allgemeinen Bedingungen der Construction folgt, auch von dem Objecte des construirten Begriffs allgemein gelten muß.

II. Objekt der Mathematik.

§. 6. Durch die besondere Form der mathematischen Erkenntniß wird zugleich auch der Gegenstand derselben bestimmt. Sie kann nämlich, vermöge dieser eigenthümlichen Form, nur allein auf Gröfsen gehen, weil nur der Begriff von Gröfsen sich construiren, d. h. *a priori* in der Anschauung darstellen läßt; Qualitäten aber in keiner andern, als empirischen Anschauung sich darlegen lassen.

§. 7. Obgleich, nach dem vorigen §. die mathematische Erkenntniß nur allein auf Gröfsen gehen kann, so folgt doch daraus keineswegs, daß auch umgekehrt die Gröfsen nur allein ein Gegenstand der mathe-

matischen Erkenntniß seyn und werden können. Vielmehr lassen sich, wie auch schon (§. 5.) angedeutet worden ist, die Größen sowohl discursiv als intuitiv betrachten, und die ganze Größenlehre (nicht *Mathesis*, sondern etwa *Megethologia*) zerfällt daher in die *discursive* und *intuitive*, zwei dem Umfange nach sehr ungleiche Theile, die sich zusammen ohngefähr so verhalten, wie die Grundlage eines Gebäudes sich zu dem Gebäude verhält.

Die discursive Größenlehre, d. h. die bloß discursive Betrachtung der Größen überhaupt und ihrer allgemeinsten Bestimmungen, ist nämlich die wahre Grundlage der intuitiven, oder der Mathematik. Obgleich schon Viele die Idee dieser Wissenschaft gehabt, und unter dem Namen: *Mathesis universalis*, *communis*, *prima*, *Organon Quantorum*, u. a. m. davon gesprochen haben; so ist sie doch bis jezt noch von Niemanden ausgeführt worden. Wir glauben indessen, ihren Zweck und Umfang nicht kürzer und schicklicher, als mit dem Namen: *Protheorie der Mathematik* bezeichnen

zu können, den wir einst, durch die Ausführung selbst, genugthuend zu rechtfertigen gedenken.

III. Begriff der Mathematik.

§. 8. Die Mathematik (*Mathesis*), als das System der mathematischen Erkenntnisse, ist demnach die intuitive Wissenschaft von den Grössen. Ihr Name ist griechischen Ursprungs. Die Griechen nannten sie nämlich *Μαθητική* d. h. die Wissenschaft, und ihre Sätze *Μαθηµατα*, d. h. Lehren ohne Beisatz und vorzugsweise, entweder um damit anzuzeigen, daß sie dem Range nach die erste unter allen Wissenschaften sey, oder weil sie, der Zeit nach, wirklich die erste war, die sie in ihren philosophischen Schulen vorzutragen pflegten.

§. 9. Die Grösse *in abstracto* (*Quantitas*) ist das, wornach jedes Ding groß genannt wird. Ein Ding wird aber groß genannt, wiefern an ihm Verbindung eines Gleichartig - Mannigfaltigen Statt findet. Das Ding heisst in so ferne selbst eine Grösse *in concreto* (*Quantum*).

§. 10. Die Gröſſe *in abstracto* iſt alſo diejenige Beſtimmung (*affectio*) eines Dinges, wodurch die Verbindung eines Gleichartig-Mannigfaltigen in demſelben geſetzt wird.

Künftig ſoll das Wort *Quantität* immer das *abstractum*, das Wort *Gröſſe* aber das *concretum* bezeichnen.

§. 11. Die Mathematik beſchäftigt ſich ſowohl mit Gröſſen, als mit der bloſſen *Quantität*; ſie muß alſo die Begriffe von beiden conſtruiren, d. h. *a priori* in der Anschauung darſtellen. Beides kann ſie nur vermittelſt der allein *a priori* gegebenen Anschauungsformen des Raums und der Zeit.

§. 12. Im Raume nämlich ſtellen wir Gröſſen mit einer Qualität derſelben (ihrer Geſtalt) *a priori* in der Anschauung dar, indem wir uns die Gegenſtände ſelbſt durch gleichförmige Synthesis c) ſchaffen. Dieſe

c) Synthesis iſt Zuſammensetzung des Mannigfaltigen, was nicht nothwendig zuſammen gehört, wie z. B. die zwei Dreiecke, in welche ein Quadrat durch die Diagonale getheilt wird, nicht nothwendig zuſammengehören. Von dieſer Art iſt die Verbindung

Construction heißt die ostensive. So construire ich z. B. ein Dreieck, indem ich den diesem Begriffe entsprechenden Gegenstand entweder durch bloße Einbildung in der reinen, oder nach derselben auch auf dem Papiere in der empirischen Anschauung, aber völlig *a priori*, ohne das Muster dazu aus irgend einer Erfahrung geborgt zu haben, darstelle.

§. 13. In der Zeit hingegen stellen wir nicht nur die bloße Quantität, d. h. die bloße Synthesis des Gleichartig - Mannigfaltigen (Zahl) — mit gänzlicher Abstraction von allen Qualitäten des Gegenstandes, der nach einem solchen Größensbegriffe gedacht werden soll, — sondern auch alle Operationen, wodurch Quantität erzeugt und verändert wird, z. B. die Addition, Subtraction etc. vermittelt schicklicher Zeichen, nach gewissen allgemeinen Regeln in der Anschauung dar. Z. B. wenn eine GröÙe durch eine andere dividirt werden soll, setzt man beider des Gleichartigen in allem, was ein Gegenstand der mathematischen Betrachtung werden kann.

Charaktere, unter der, zu Bezeichnung der Division gebräuchlichen Form zusammen; soll aus einer Gröſſe eine Wurzel von einem gewissen Grade gezogen werden, so ſetzt man dem Zeichen der Gröſſe das Wurzelzeichen mit dem Exponenten des verlangten Grades vor, u. ſ. w. Diese Construction heißt die **symbolische**.

IV. Theile der Mathematik.

§. 14. Wiefern die Mathematik die Gröſſen, bloß als ſolche an und für ſich ſelbſt betrachtet, ſofern heißt ſie **reine** oder **abstracte**; wiefern ſie hingegen die Gröſſen als Beſtimmungen gewiſſer materiellen Objecte der Erſcheinungswelt in Unterſuchung zieht, ſofern heißt ſie **gemischte** (ſonſt auch **angewandte**) Mathematik. Diese Benennungen ſind von den Quellen der Wiſſenſchaft hergenommen, welche im erſten Falle lauter **reine** Anſchauungen und Begriffe *a priori*, im andern hingegen **reine** Vernunftkenntniſſe, mit empiriſchen Principien **vermisch**t, ſind.

§. 15. Die reine Mathematik zerfällt also in zwei Haupttheile, den, der sich mit den ostensiven Constructionen der Gröſſen, und den, der sich mit den symbolischen Constructionen der Quantität beschäftigt. Jener heißt die Geometrie, und macht die besondere; dieser heißt die Arithmetik, und macht die allgemeine Mathematik aus.

§. 16. In der gemischten Mathematik würden, da die realen Objecte der Erscheinungswelt alle im Raume und in der Zeit sind, folglich die ganze reine Mathematik auf sie alle anwendbar ist, eben so viele besondere Disciplinen Statt finden, als es besondere Gegenstände giebt, bei welchen Bestimmung der Quantität Statt findet. Da aber die Lehren der reinen Mathematik auf die meisten dieser Gegenstände unmittelbar, und ohne besondere Vorbereitungen sich anwenden lassen; so hebt man von denselben nur diejenigen für die mathematische Betrachtung aus, bei welchen diese Anwendung entweder mehr Schwierigkeiten hat, oder ein gewisses Maass anderweitiger Kenntnisse von der Beschaf-

fenheit der Objecte selbst voraussetzt. Diese Bedingungen finden vorzüglich Statt bei den Kräften der Körper, wodurch sie Bewegungen hervorbringen oder hindern; ferner bei dem Lichte und den Himmelskörpern.

Daher machen die mechanischen, optischen und astronomischen Wissenschaften die drei Hauptabtheilungen der gemischten Mathematik aus.

§. 17. Die reine und gemischte Mathematik werden auch unter dem gemeinschaftlichen Namen der theoretischen — weil sie blos theoretische Untersuchungen enthalten, — der praktischen entgegengesetzt, welche sich mit Ausübungen beschäftigt, wozu die theoretische die Regeln giebt. Jeder Theil der reinen sowohl, als der gemischten Mathematik zerfällt daher eigentlich wieder in einen theoretischen und einen praktischen Theil; wie denn auch von der Arithmetik, Geometrie, Mechanik, Optik und Astronomie der praktische Theil bereits in eigenen Schriften besonders bearbeitet ist.

§. 18. Unter dem Namen der technischen Mathematik werden die mathema-

tischen Gründe einiger Künste abgehandelt, deren Ausübung aufser jenen, noch einen ansehnlichen Vorrath anderer Kenntnisse erfordert, die ganz aufser dem Gebiete der Mathematik liegen. Dergleichen sind: die Baukunst, Geschützkunst und Befestigungskunst.

§. 19. Entsteht eine Grösse durch eine solche Synthesis des Gleichartig-Mannigfaltigen, welche von der productiven Einbildungskraft durch einen ununterbrochenen Fortgang in der Zeit von einer Gränze bis zur andern zu Stande gebracht wird, so heisst sie eine stetige, fließende Grösse (*Quantum continuum*), weil man die Continuität der Zeit besonders durch den Ausdruck des Fließens (Verfließens) zu bezeichnen pflegt.

§. 20. Entsteht hingegen eine Grösse nicht durch bloße Fortsetzung der productiven Synthesis einer gewissen Art, sondern durch Wiederholung einer immer aufhörenden Synthesis; so ist sie das, was man bisher, nicht ganz schicklich, eine unstetige Grösse (*Quantum discretum*) genannt

hat, eigentlich ein Aggregat, das aus lauter stetigen Gröſſen besteht, weil die dabei zum Grunde liegende Einheit immer eine stetige Gröſſe ist.

§. 21. Wenn man indessen eine stetige und eine sogenannte unstetige Gröſſe, jede als ein Ganzes, d. h. als Product der Verbindung eines Gleichartig - Mannigfaltigen zur Einheit betrachtet, und in dieser Hinsicht mit einander vergleicht; so findet sich zwischen beiden der wesentliche Unterschied, daß die Theile der stetigen Gröſſe weder von einander abgesondert, noch in bestimmter Menge vorhanden sind; die unstetige Gröſſe hingegen immer eine bestimmte Menge abgesonderter Theile hat, und daß mithin, als Ganzes betrachtet, jene in der That stetig, diese aber unstetig ist. Dadurch wird also der bisherige Sprachgebrauch gewissermaßen gerechtfertigt. Nimmt man aber diesen an, so folgt aus der, in den vorigen §§. beigebrachten Entstehungsart dieser Gröſſen von selbst, daß die stetigen, als solche, ein Gegenstand der Geometrie, die unstetigen hingegen ein Gegenstand der Arith-

metik sind, da jene, als solche, nur im Raume, diese nur in der Zeit (durch Zahl) sich darstellen lassen.

§. 22. Es ist aber leicht einzusehen, daß man sowohl bei den unstetigen Größen von dem Nichtzusammenhangen, als bei den stetigen, von dem Zusammenhangen der Gränzen des Gleichartig-Mannigfaltigen, was in ihnen verbunden ist, abstrahiren, und dadurch jene in diese, und umgekehrt, verwandeln könne, und daß es Fälle gebe, wo man genöthiget ist, eine solche Verwandlung vorzunehmen. So hat z. B. der Baumeister oder Ingenieur, der den Druck der Erde gegen Futtermauern bestimmen soll, erhebliche Gründe, seine Rechnung für diejenige Erdart zu führen, deren Theile am wenigsten unter sich zusammenhangen, d. h. für Sand; und dabei wird er, nach Maafsgabe der Umstände, gerathen finden, zur Erleichterung der Rechnung anzunehmen, daß die Sandkörnchen kugelförmig seyen, und jedes derselben auf drei andern ruhe, und mit diesen ein Tetraëder bilde; oder daß jedes Körnchen auf vier andern ruhe,

und mit diesen eine vierseitige Pyramide bilde, und unter dieser Voraussetzung für Sandtetraëder und Sandpyramiden zu rechnen. Soll er hingegen auf einem gegebenen Platze Pfähle einrammen lassen, so, daß auf jeden Quadratschuh Fläche ein Pfahl komme, der zum Durchschnitte ein Quadrat von einer gegebenen Seite habe; so kann ihm die Betrachtung der Continuität der Fläche zu nichts dienen, sondern er muß, um die Anzahl der nöthigen Pfähle bestimmen, und solche vorher zurüsten lassen zu können, schlechterdings erst wissen, wie viel einzelne Quadratschuhe in der Fläche seines gegebenen Platzes enthalten seyen.

Eigentlich und nach der Strenge kann man also nicht, wie bisher fast durchgängig geschehen ist, bei der Gränzbestimmung des Gebiets der Geometrie und Arithmetik den Unterschied der stetigen und unstetigen Größen zum Grunde legen.

Da übrigens durch die Verwandlung der stetigen Größen in unstetige die Betrachtung der Quantität mit einer Qualität (der Gestalt) in die allgemeinere Betrachtung der

bloßen Quantität verwandelt wird, welche der Gegenstand der Arithmetik ist; so erhellet auch hieraus die Richtigkeit der oben (§. 15.) beigebrachten Bestimmung, daß die Geometrie die besondere, die Arithmetik die allgemeine Größenlehre ausmache.

§. 23. Die Größen sind ferner entweder extensive oder intensive. Eine extensive Größe (*Quantum extensum*) ist eine solche, an welcher das Gleichartig-Mannigfaltige außer einander ist, deren Erzeugung also durch Zusammensetzung des letzten möglich ist; oder bei welcher die Vorstellung der Theile die Vorstellung des Ganzen möglich macht, also nothwendig vor dieser vorhergeht, und die daher auch successiv von Theil zu Theil apprehendirt wird; wie z. B. eine Linie.

Eine intensive Größe (*Quantum intensum*) hingegen heißt eine solche, in welcher das Gleichartig-Mannigfaltige nicht außer einander ist, die daher auch nicht durch Zusammensetzung desselben erzeugt werden kann, sondern als eine Einheit gedacht und apprehendirt wird, und in wel-

cher die Vielheit nur durch Annäherung zur Negation vorstellbar ist, wie z. B. die Stärke einer Empfindung oder der Affection des Sinnes durch ein äusseres Objekt. Man nennt daher die Quantität der intensiven Grösse ihre Intensität, oder einen Grad, zwischen welchem und der Nulle unzählige Zwischengrade sich gedenken lassen. Eine intensive Grösse ist also grösser, als die andere, wiefern die letzte nur ein Zwischengrad zwischen der ersten und der Nulle ist.

§. 24. Da wir von ausgedehnten Grössen, die nicht reale Objecte der Erscheinungswelt sind, keine andere kennen, als Raum und Zeit, die Zeit aber im Raume durch eine gerade Linie sich darstellen läßt; so erhellet auch hieraus, daß die besondere Mathematik (der ausgedehnten Grössen) blos aus der Wissenschaft des Räumlich-ausgedehnten d. i. der Geometrie bestehe.

§. 25. Könnten wir die Quantität der intensiven Grössen eben so unmittelbar und auf ähnliche Art, wie die der extensiven

bestimmen, so würde die Wissenschaft von denselben den zweiten Theil der besonderen Mathematik ausmachen. Jenes aber ist unmöglich. Denn die intensiven Gröſsen sind entweder so beschaffen, daſs es uns an einem Maasse, ihre Quantität zu bestimmen, gänzlich fehlt, und dann sind sie gar kein Gegenstand mathematischer Betrachtung, wie z. B. die verschiedenen Kräfte und Vermögen unsers Gemüths; oder so, daſs ihre Quantität nur aus ihren Wirkungen, vermittelt extensiver Gröſsen, sich bestimmen läſst, und dann hängt die Bestimmung derselben von der Beschaffenheit realer Objecte ab, die wir nur durch Erfahrung kennen lernen, und ist also ein Gegenstand der gemischten Mathematik, z. B. die Intensität des Lichts, der Wärme u. d. m.

§. 26. Hievon scheint zwar die Bewegung insofern eine Ausnahme zu machen, als der Begriff derselben auf der bloſsen Verbindung der Vorstellungen von Raum und Zeit beruhet, und der bewegte Körper als ein geometrischer Punkt betrachtet werden kann. Da aber die Beweglichkeit schon

eine Qualität der Materie ist, die bloß aus der Erfahrung erkannt werden kann, so besteht die Wissenschaft von der Bewegung aus Anwendungen der reinen Mathematik auf ein reales Object, das materiale Bewegliche im Raume, und ist aus diesem Grunde als ein Theil der gemischten Mathematik zu betrachten.

§. 27. Man theilt auch die gesammte Mathematik in die elementare und höhere ein.

Will man dabei die von den Alten, welche diese Eintheilung — wenn schon nicht ganz dem Namen, doch der Sache nach — eingeführt haben, angenommene Grenzbestimmung beibehalten — und man hat sehr erhebliche Gründe dieses zu thun: — so gehört zum elementaren Theile der Arithmetik alles, was sich von der Quantität der Größen bloß mit Hülfe der Proportionen ausmachen und herausbringen läßt; zum höheren Theile hingegen alles, zu dessen Bestimmung andere Hülfsmittel erfordert werden.

§. 28. Das erste und allgemeinste dieser Hülfsmittel machen die Gleichungen

(*aequationes*) d. h. Darstellungen der nämlichen Gröſſe durch zwei identische oder verschiedene Ausdrücke, aus, deren allgemeine Theorie in der Algebra abgehandelt wird.

§. 29. Ein anderes, äufserst wichtiges und ausgebreitetes, Erfindungsmittel der höheren Arithmetik ist die *Combinationslehre*, welche alle möglichen Arten finden lehrt, wornach mehrere gegebenen Elemente verbunden, versetzt und vermischt werden können.

§. 30. Bis hieher betrachtet man die Quantität aller Gröſſen, wie solche gegeben oder durch Rechnung gefunden wird, an und für sich als unveränderlich, und die Gröſſen selbst als beständig (*constantes*); und den Gegenstand aller zu den bisher aufgezählten Theilen der Mathematik gehörigen Untersuchungen machen blos die Verhältnisse aus, in welchen gegebenen Bedingungen unterworfenene Gröſſen zu einander stehen. Es kommen aber, besonders bei der mathematischen Betrachtung der Natur, sehr viele Aufgaben vor, die man unmöglich würde auflösen können, ohne die Gröſſen selbst

als veränderlich (*variables*), und nach und nach verschiedene stetig aufeinander folgende Zustände der Quantität durchlaufend, anzusehen, um, vermittelt der Verhältnisse dieser Veränderungen, auf die Verhältnisse der Gröſſen selbst zu kommen. Diese Betrachtung führt daher auf die allgemeine Theorie der Functionen, welche hauptsächlich die zusammengehörigen Veränderungen von einander abhängiger Gröſſen zum Gegenstande ihrer Untersuchungen macht, die sich alle auf folgende zwei Aufgaben zurückführen lassen.

1) Aus einer gegebenen Stammfunction (*functio generatrix*) die abgeleiteten Functionen;

2) Aus jeder gegebenen abgeleiteten Function (*functio derivata*) die Stammfunction zu finden.

Mit der ersten dieser Aufgaben beschäftigt sich die Differentialrechnung (*calculus differentialis*), mit der andern die Integralrechnung (*calculus integralis*). Einen Anhang von beiden macht die Variationsrechnung (*calculus variatiouum*).

aus, die sich von der Differentialrechnung bloß durch die von ihr angenommene Unabhängigkeit der veränderlichen Größen, welche in dieser, als durch beständige Verhältnisse mit einander verbunden, betrachtet werden, unterscheidet.

Betrachtet man diese Theorien aus einem andern Gesichtspunkte, so kann man eben so richtig sagen, die Differentialrechnung beschäftige sich mit Untersuchung der Grenze des Verhältnisses der gleichzeitigen Veränderungen einer veränderlichen GröÙe und ihrer Functionen, d. h. mit Untersuchung des Differentialverhältnisses derselben; die Integralrechnung hingegen mit den Methoden, nach welchen aus dem gegebenen Differentialverhältnisse veränderlicher Größen das Verhältniß dieser Größen selbst gefunden werden kann.

§. 31. Alle diese Theile der höheren Arithmetik hat man sonst auch unter dem gemeinschaftlichen Namen der Analysis zusammenbegriffen, und diese in zwei Haupttheile, die Analysis des Endlichen und des Unendlichen getheilt, so, daß zu

jener bloß die Algebra mit den ihr angehörigen Methoden und deren Anwendungen, zu dieser aber die Differential- und Integralrechnung gerechnet wurde.

§. 32. Die neueste Erweiterung, womit der erfinderische Scharfsinn Arbogast's den analytischen Entdeckungen des achtzehnten Jahrhunderts die Krone aufgesetzt hat, ist die *Derivationsrechnung* (*calculus derivationum*), welche die Absicht hat, die kürzesten und leichtesten Methoden bekannt zu machen, wornach eine *abgeleitete* (*derivata*) GröÙe aus der, welche ihr vorhergeht, (wie z. B. dem zweiten Differentiale das erste, dem dritten das zweite u. s. w.), oder aus der Function selbst sich herleiten läßt. Diese neue Art von Calcul umfaßt die ganze Theorie der Reihen, und die Differentialrechnung ist nur ein Zweig von ihr.

Von der letzten unterscheidet sie sich hauptsächlich dadurch, daß man bei ihr die GröÙen, deren eine aus der andern sich ableiten läßt, nicht an und für sich selbst, sondern bloß in den Operationen, wo-

durch sie zusammen verbunden werden, betrachtet, wobei die Gröſſen selbst auch ganz willkührlich und von einander unabhängig seyn können, und die abgeleiteten Gröſſen, zu welchen sie führt, sind daher auch nicht sowohl aus jenen, von welchen man ausgieng, als vielmehr aus den Operationen, abgeleitet.

§. 33. Die Grenzen zwischen der elementaren und höheren Geometrie haben die Alten eben so bestimmt abgesteckt, indem sie auſſer der geraden Linie bloß die Kreislinie nebst den von beiden begrenzten Flächen und Körpern — und zwar alle diese Gegenstände, auſſer den der Geometrie eigenthümlichen Erfindungsmitteln, — bloß mit Hülfe der Proportionen in der Elementargeometrie betrachteten, die übrigen krummen Liniensflächen und Körper aber in die höhere Geometrie verwiesen.

§. 34. Legt man diese Eintheilungen der reinen Mathematik (§. 27. 33.) zum Grunde, so ergiebt sich daraus von selbst, was in den Disciplinen der gemischten zu dem

elementaren und zu dem höheren Theile einer jeden gehöre.

V. Methode der Mathematik.

§. 35. Der Ausdruck: **mathematische Methode** wird in zweierlei Bedeutungen gebraucht.

1) Im **engeren Verstande**, wo er das **Verfahren der Mathematiker bei Erfindung und Darstellung einzelner Sätze**;

2) Im **weiteren Verstande**, wo er das **Verfahren der Mathematiker bei Anordnung und Verbindung der einzelnen Sätze zum Ganzen des Systems bezeichnet**.

§. 36. Die **mathematische Methode im engeren Verstande** ist von zweierlei Art:

1) **synthetisch**, 2) **analytisch**. Bei der synthetischen Methode geht man **vorwärts von den Gründen zur Folge**, welche jedesmal der **zuerweisende**, schon als **erfunden angenommene Satz** ist. Sie heißt daher auch die **progressive Methode**. Bei der analytischen Methode **hingen** geht man **rückwärts von den Fol-**

gen, d. i. von den mancherlei Verbindungen des Bekannten mit dem Unbekannten, zum Grunde, d. i. dem bestimmten Verhältnisse des Unbekannten zu dem Bekannten, welches jedesmal der zuerfindende Satz ausdrückt. Sie heißt daher auch die **regressive Methode**.

§. 37. Da die Form des Systems nach der verschiedenen Form seiner Bestandtheile verschieden ausfallen muß, so findet der nämliche Unterschied auch bei der mathematischen Methode im weiteren Verstande Statt. In diesem Verstande heißt also **synthetische Methode** das Verfahren der Mathematiker, bei Aufführung eines synthetischen — **analytische** hingegen, jenes bei Aufführung eines analytischen Systems.

§. 38. Der Gang der Mathematiker bei Aufführung eines synthetischen Systems ist dieser: sie gehen von **Erklärungen**, d. h. von **genauen Bestimmungen** (*definitiones*) der Begriffe ihrer Objecte aus, leiten aus diesen allgemeine theoretische und praktische Sätze ab, die für sich selbst einleuch-

tend sind, Grundsätze (*axiomata*) und Forderungen (*postulata*). Vermittelt dieser zeigen sie in den Aufgaben (*problemata*) die Möglichkeit ihrer Objecte, und bereiten die späterhin nöthigen Constructionen vor. Hierauf zeigen sie die Wahrheit der nicht für sich einleuchtenden theoretischen Sätze, — Lehrsätze — (*theorematata*) durch Schlüsse aus den vorangeschickten Erklärungen, Grundsätzen und schon erwiesenen Sätzen. Merkwürdige Sätze, auf welche man bei diesen Ableitungen gelegentlich stößt, oder die aus den bewiesenen Sätzen unmittelbar folgen, werden diesen in Zusätzen (*corollaria*) angehängt. Endlich werden noch in Anmerkungen (*Scholia*) Erläuterungen, Anwendungen der vorgetragenen Sätze und historische Nachrichten von denselben beigebracht. Nimmt man irgendwo, unter mehreren gleich möglichen Sätzen, einen, mit Ausschließung der übrigen, an, so heißt solcher ein Wahlsatz (*positio arbitraria*). Bedient man sich irgendwo, zu Begründung anderer Sätze, eines Satzes, der nicht eigentlich an den Ort

gehört, wo man seiner eben jetzt bedarf; so wird solcher unter dem Namen eines *Lehn-
satzes* (*Lemma*) aufgeführt. Endlich werden, in der gemischten Mathematik, (auch Erfahrungen als Grundsätze gebraucht.
§. 39. Hievon unterscheidet sich das bei
Aufführung eines analytischen Systems übliche Verfahren bloß dadurch, daß man sich bei dem letzteren der vorangeschickten *Vordersätze* (Erklärungen, Grundsätze, Forderungen etc.) nicht bedient, um schon erfundene Sätze zu erweisen, sondern, um neue erst zu erfinden. Zu dem Ende formirt man aus den gegebenen Verbindungen des Bekannten mit dem Unbekannten, oder den gegebenen Bedingungen, Gleichungen, und leitet aus diesen eine *Finalgleichung* ab, die, wenn sie in die gewöhnliche Wortsprache übersetzt wird, den gesuchten Satz giebt. Beide Systeme haben also eine solche Anordnung mit einander gemein, vermöge welcher die späteren Sätze die früheren so voraussetzen, daß jene schlechterdings nichts annehmen, was nicht in diesen bereits gezeigt ist, und der Unterschied bei-

der besteht bloß darin, daß im synthetischen Systeme jeder frühere Satz ein Mittel zu Begründung, im analytischen hingegen ein Mittel zu Erfindung der späteren wird.

VI. Nutzen der Mathematik.

§. 40. Von der Nutzbarkeit einer Sammlung von Wissenschaften, worunter die meisten von der Art sind, daß schon ihre Namen ihre Unentbehrlichkeit zu Befriedigung der wichtigsten Bedürfnisse des menschlichen Lebens ausdrücken, viele Worte zu machen, würde eine sehr überflüssige Arbeit seyn. Es mag daher genügen, bloß auf die Gattungen aufmerksam zu machen, unter welche alle Vortheile sich bringen lassen, die das Studium der Mathematik gewährt. Diese sind 1) Der formale Nutzen, den es als Mittel zur Verstandesbildung überhaupt, und 2) der materiale, den es als Sammlung an und durch sich selbst nützlicher Kenntnisse bringt.

§. 41. Der formale Nutzen der Mathematik läßt sich nach folgenden Betrachtungen leicht übersehen.

1) Die Mathematik ist das wirksamste Mittel zur Entwicklung und Erhöhung der Verstandeskkräfte. Die Gegenstände der Mathematik sind von der Art, daß sie den Wahrheit suchenden, Wahrheit um ihrer Selbst willen schätzenden Geist stark anziehen. Die Leichtigkeit, womit er der ersten Gründe derselben sich bemächtigt, die Fruchtbarkeit dieser Gründe an allerlei wichtigen Folgen, die sein forschender Blick bald durchscheinen sieht, die Fertigkeit im Urtheilen und Schliessen, die er durch Ableitung und Zusammenstellung dieser Folgen sich erwirbt, und das Gefühl der verstärkten Kraft, das sich ihm als die Frucht solcher Uebungen ankündigt, belebt seinen Muth, immer weiter vorzudringen. Legt ihm dabei in der Folge die Strenge der Methode Anstrengungen auf, die eben so groß, oder nicht viel kleiner, als jene der ersten Erfinder sind; so ist dies ein Zwang, den er sich gerne gefallen läßt, da er mit Gewifsheit voraus weiß, daß eine neue Wahrheit der Lohn seiner Mühen seyn werde. Mit Vergnügen bietet er also alle seine Kräfte auf, und setzt besonders Urtheilskraft,

Vergleichungs- und Verbindungsvermögen in ein lebhaftes, harmonisches, ihrer Entwicklung und Ausbildung äußerst günstiges Spiel. Der glückliche Fortgang der früheren Versuche macht, daß ihm jede spätere Anstrengung nur halb so schwer erscheint, und nach einiger Zeit auch wirklich wird, da öftere Wiederholungen solcher Uebungen nothwendig daurende Modificationen der Kraft selbst zur Folge haben, wodurch sie an Intension unglaublich gewinnen, und zu ähnlichen Aeufserungen immer geschickter werden muß. Ja es kann aus diesen Beschäftigungen endlich eine solche Stärke in der Erfindungskunst erwachsen, die auch die schwersten Untersuchungen nur in ein angenehmes Spiel verwandelt.

2) Die Mathematik ist die beste praktische Anleitung zum regelmässigen Selbstdenken. Denn die Anweisungen der Logik zu Bildung richtiger Begriffe, Urtheile und Schlüsse werden nicht nur von keiner andern Wissenschaft mit der Strenge und Genauigkeit, wie von der Mathematik, befolgt, son-

dern, wenn auch in dieser einmal ein unrichtiger Satz angenommen, oder ein Fehler im Schließen begangen worden wäre, so muß sich solches in der Folge doch sehr bald entdecken, weil hier die Urtheilskraft überall die Anschauung zur Seite hat.

3) Die mathematische Methode ist und bleibt das vollkommenste Muster der Methode für alle Wissenschaften. Das Wesentliche der mathematischen Methode besteht in der genauen Befolgung des Gesetzes: alles, was man aussagt, durch Beifall erzwingende Schlüsse aus unbestreitbaren Gründen darzuthun. Dies kann, dies muß in allen andern Wissenschaften nachgeahmt werden, und jede der übrigen verdient nur in dem Maasse den Namen einer Wissenschaft, als sie durch diese Nachahmung jenem Ideale sich nähert.

§. 42. Was den materialen Nutzen der Mathematik betrifft, so ist dieser so ausgebreitet, daß man von seiner Ausdehnung nicht anders eine angemessene Vorstellung erwecken kann, als durch die leicht erweisliche

Behauptung, daß nur die Mathematik es sey, was den Menschen, im weitesten Umfange des Worts, zum Herrn der Natur macht.

Denn in der That ist es nur sie, was ihm Himmel und Erde, Luft und Wasser unterwirft.

Mit ihrer Hülfe bauet er sich auf und in der Erde an, wo es ihm gefällt, sichert er seine Wohnplätze gegen jede feindliche Gewalt und verbindet die einzelnen durch bequeme Straßen. Mit ihrer Hülfe zwingt er Ströme und Meere in willkührlich abgesteckte Grenzen ein, durchschneidet er den Luftkreis, wie den Ocean mit kühnem Fluge, um sich auf jenem, wie auf diesem Wege alles zu verschaffen, nach dessen Besitze wahres Bedürfnis oder bloße Neugierde seine Wünsche hinlenkt. Mit ihrer Hülfe holt er selbst von dem Meeresgrunde Schätze herauf und errichtet Gebäude unter den Wellen. Mit ihrer Hülfe schafft er sich aus den Urstoffen selbst Luft und Wasser in jedem Verhältnisse der Mischung, das der

Zustand seines Körpers ihn wünschen lassen mag. Mit ihrer Hülfe zeichnet er sogar dem Blitze die Bahn vor, die dieser nehmen soll, wenn er seiner Wohnung nahe kommt, ja er leitet das Feuer vom Himmel auf seinen Tisch, um sein Licht dabei anzustecken. Mit ihrer Hülfe mißt er auf dem benachbarten Monde Berge und Höhlen, mit gleicher Genauigkeit, wie auf seinem eigenen Wohnplatze aus, und verfertiget Karten von jenem, wie von diesem. Mit ihrer Hülfe macht er auch die entferntesten Himmelskörper seinen Absichten dienen, hängt die für ihren Lauf entworfenen Gesetze an seinen Wänden auf, sagt, nach denselben, jede Veränderung in ihren Erscheinungen, so lange es ihm gefällt, voraus, und erwartet im vorherbestimmten Augenblicke den Erfolg mit gleicher Gewissheit, wie den Schlag seiner Wanduhr, wenn er ihren Zeiger auf die Stunde gerückt hat.

Wenn man daher wahre Menschengrösse schildern will, so kann nur ein vollendeter Mathematiker als Original dazu ge-

braucht werden. Um bei dieser Behauptung allen Schein von Uebertreibung aus Vorliebe für diese Wissenschaft zu vermeiden, entlehne ich eine solche Beschreibung von einem Manne, der seinen wohlverdienten Ruhm ganz andern, als mathematischen Einsichten verdankte. Sie ist folgende:

„Ein Wesen, das durch die Kunst die
„Grenzen seiner anerschaffenen Fähigkeiten
„ins Unendliche erweitert, mit seinen ge-
„schärften Sinnen in die innersten Geheim-
„nisse der Natur dringt, dieselben in ihre er-
„sten Urstoffe auflöst, den Lichtstrahl, wie
„einen Faden, entwickelt, die Luft und die
„Planeten wiegt, in einem schweren Lei-
„be eingeschlossen mit seinem Forschen sich
„über alle Himmel erhebt, aus einigen ein-
„zelnen Wahrnehmungen die allgemeinen
„Gesetze der Natur sich erklärt, aus eini-
„gen Linien den Abstand der entferntesten
„Himmelskörper bestimmt, bis ans Ende
„der Welt ihre Stellungen gegeneinander
„berechnet, die Trabanten des Jupiters zu
„Führern seiner Reisen hier auf der Erde

„macht — — — der Geist eines Leibniz
 „eines Newton! — — Hier ist mehr,
 „als eine Welt, hier ist Verwandtschaft mit
 „der Gottheit! d)

d) Jerusalem's Betrachtungen über die vornehmsten Wahrheiten der Religion. Braunschweig 1785. 1. Th. S. 223. ff.

I. Buch. Geometrie.

Erklärung 1.

Die Geometrie ist die Wissenschaft von den räumlich ausgedehnten Gröſſen (Encl.

§. 12.)

Zus. Da der Geometer die Eigenschaften und Verhältnisse dieser Gröſſen in Untersuchung nimmt, ohne auf irgend ein materiales Objekt der Erscheinungswelt zu sehen, an welchem sie als Bestimmungen sich fänden, so ist er genöthiget, sich solche zum Behufe seiner Untersuchungen, mittelst der productiven Einbildungskraft, erst selbst zu schaffen; zu dem Ende aber muß er von folgendem Satze ausgehen.

Forderung 1.

§. 2. Die unmittelbare Vorstellung (Anschauung) von dem einigen unendlichen allbefassenden Raume und dessen möglichen Theilen und Grenzen, so oft, als man will, zum Bewußtseyn zu brin-

gen, und sowohl durch **Begrenzung** als durch **Beschreibung** Gestalten in ihm zu erzeugen.

Zus. 1. Vermöge dieser Vorstellung wird uns der Raum als ein concretes, einzelnes, nach allen möglichen Richtungen ohne Ende ausgedehntes Ding, das aus lauter gleichartigen, nebeneinander seyenden Theilen besteht, die unter sich stetig zusammenhangen, und deren **Coëxistenz** auf eine unabänderliche Art bestimmt ist, gegeben.

Zus. 2. Der Raum läßt sich also theilen, und überall, wo man will, begrenzen.

E r k l ä r u n g 2.

§. 3. Ein körperlicher Raum heißt ein solcher, der allenthalben Körper in sich aufzunehmen, von ihnen eingenommen zu werden, zwischen sie einzugehen, und sich auf allen Seiten um sie her anzulegen, geschickt ist.

Zus. Weil der unendliche Raum durch die unmittelbare Vorstellung (§. 2.) zugleich als der allbefassende Raum, d. h. als das gemeinschaftliche Behältniß aller körperlichen Objecte, welche nur allein unter seiner Form vorstellbar sind, gegeben wird, so wird er als ein körperlicher Raum vorgestellt.

E r k l ä r n n g. 3.

§. 4. Die Grenze (*Terminus*) ist das Aeufserste eines Dinges, womit das aufhört, was bisher gesetzt wurde, oder etwas anfängt, was vorher noch nicht war.

E r k l ä r u n g. 4.

§. 5. Eine Stelle des Raums, in welcher irgend ein Ding gesetzt wird, heifst der Ort (*locus*) dieses Dinges.

E r k l ä r u n g. 5.

§. 6. Ein völlig begrenzter körperlicher Raum heifst ein geometrischer Körper.

Zuf. Jeder geometrische Körper ist demnach ein Theil des unendlichen Raums, und seine Vorstellung setzt die Vorstellung des Ganzen schon voraus. (§. 2. 3.)

E r k l ä r u n g. 6.

§. 7. In jedem körperlichen Raume hat man dreierlei Arten von Ausdehnung zu unterscheiden.

1) Die körperliche Ausdehnung (*extensio solida*), die im Innern des Körpers, innerhalb seiner Grenzen allerwärts sich erstreckt.

2) Die **Flächenausdehnung** (*superficialis*), d. i. die Ausdehnung der Körper an ihren Grenzen selbst.

3) Die **Längenausdehnung** (*linearis*), d. i. die Ausdehnung der Flächen an ihren eignen Grenzen.

Erklärung. 7.

§. 8. Die Grenze eines geometrischen Körpers heißt eine geometrische Fläche. Die Grenze einer geometrischen Fläche heißt eine geometrische Linie. Die Grenze einer geometrischen Linie heißt ein geometrischer Punkt.

Zus. 1. Dem Körper kommt demnach körperliche Ausdehnung, der Fläche Flächenausdehnung, und der Linie Längenausdehnung zu; der Punkt aber, als die Grenze aller Ausdehnung, hat weder Ausdehnung, noch Theile, noch Gröfse.

Zus. 2. Da die Grenze eines Dings nicht ein Theil von ihm, sondern die Negation der Theile ist, so ist die Fläche nicht ein Theil des Körpers, die Linie nicht ein Theil der Fläche, und der Punkt nicht ein Theil der Linie. Demnach ist ein geometrischer Körper nicht ein Aggregat von Flächen, eine Fläche nicht ein Ag-

gregat von Linien, und eine Linie nicht ein Aggregat von Punkten.

Zus. 3. Eben so kann auch umgekehrt in der Fläche nichts Körperliches und in der Linie nichts von Flächen-Ausdehnung Statt finden. Daher kann man auch richtig die Fläche durch eine Ausdehnung, die nur Länge und Breite hat, und die Linie durch eine Länge ohne Breite erklären.

A n m e r k u n g.

Wir können zwar durch vollständige Begrenzung eines Theils von dem unendlichen Raume einen geometrischen Körper darstellen, und an diesem alsdann die verschiedenen Arten seiner Grenzen aufsuchen und betrachten, wie in den vorhergehenden Sätzen (§. 6. ff.) geschehen ist. Wenn es aber darauf ankommt, Körper von bestimmten Gestalten zu erzeugen, oder Flächen und Linien an und für sich, und abgesondert von den Ausdehnungen, welche sie begrenzen, zu betrachten, wie dies in der Geometrie gewöhnlich der Fall ist; so sind wir genöthiget, zu der ursprünglichen Raumbeschreibung durch Verbindung beider An-

schauungsformen, des Raums und der Zeit, vermittelt des Begriffs der Bewegung, unsere Zuflucht zu nehmen. Nur auf diese Art können wir, wie wir es bedürfen, Linien, Flächen und Körper von jeder beliebigen Quantität und Gestalt hervorbringen und der Anschauung darstellen. Dazu dienen folgende Sätze.

E r k l ä r u n g 8.

§. 9. Eine Ausdehnung, welche durch stetigen Fortgang eines Punkts erzeugt wird, ist eine Linie. Eine Ausdehnung, welche durch stetige Fortbewegung einer Linie erzeugt wird, ist eine Fläche. Eine Ausdehnung, welche durch stetig fortgesetzte Bewegung einer Fläche erzeugt wird, ist ein Körper.

Zus. 1. Es giebt also dreierlei Arten von räumlich ausgedehnten Gröſsen, nämlich Körper, Flächen und Linien, und auſſer diesen keine weiter.

Zus. 2. Die Flächen und Linien bestehen, wie die Körper, welche sie begrenzen aus gleichartigen, nebeneinander seyenden Theilen, und sind daher auch, wie diese, theilbar.

Zus. 5. Da jeder Theil mit dem Ganzen gleichartig ist, so ist jeder Theil eines geometrischen Körpers selbst ein Körper, jeder Theil einer Fläche selbst eine Fläche, und jeder Theil einer Linie selbst eine Linie; folglich ist jeder Theil eines Körpers, einer Fläche und Linie wieder theilbar, und mithin sind alle geometrischen Körper, Flächen und Linien ins Unendliche theilbar.

A n m e r k u n g.

Dafs die Linie nur nach einer Richtung, die Fläche nur nach zwei, und der Körper nur nach drei Richtungen, nicht nach mehreren, ausgedehnt sey, erhellet sowohl aus der Betrachtung der Ausdehnung des als vollendet angenommenen (durch Raumbegrenzung dargestellten), als aus der Betrachtung der Entstehungsart des durch ursprüngliche Raumsbeschreibung erzeugten Körpers, auf folgende Art:

1) Es sey A. B. C. D. (Fig. 1.) ein mit einfachen Elementen (Atomen) erfüllter geometrischer Körper; diese Elemente sollen zwar in Ruhe seyn, aber ohne einen merklichen Kraftaufwand sich aneinander ver-

schieben lassen. Da der Körper nach der Voraussetzung, stetig ausgedehnt und mit Materie überall gleichmäfsig erfüllt ist, so werden seine Elemente alle unter einander in inniger Berührung stehen, jedes derselben wird also ein ähnliches gerade vor sich, ein anderes gerade hinter sich, ein drittes zur Rechten und ein viertes zur Linken neben sich, endlich ein fünftes gerade über sich, und ein sechstes gerade unter sich haben. Nun setze man, das Element C werde mit einem Male, durch eine innere Kraft, zur Bewegung sollicitirt, ohne dafs jedoch die Richtung dieser Bewegung bestimmt werde; so ist offenbar, dafs dieses Element entweder gerade neben sich nach A, oder gerade unter sich nach B, oder nach der Rechten gegen D, oder nach der Linken gegen E, oder endlich gerade vor sich nach F, oder gerade hinter sich nach G zu sich bewegen könne. (In den Punkten A, D, G, B, E, F, sind nämlich die Elemente abgebildet, die mit dem C anfänglich, so lange es in Ruhe war, in Berührung standen.) Mehr, als diese sechs Richtungen lassen sich

bei der Bewegung eines Elements im Innern eines Körpers nicht gedenken. Aber von diesen sechs Richtungen liegt immer eine in der Verlängerung einer andern: es fallen also je zwei derselben in eine zusammen, indem das Entgegengesetzte ihrer Lage lediglich auf den Anfangspunkt, von welchem das bewegliche Element ausgeht, sich bezieht. Folglich bleiben für die Bewegung eines Elements im Innern eines Körpers nicht mehr, als die drei Richtungen möglich: (1) von Vorne nach Hinten, welche man die Länge, (2) von der Rechten nach der Linken, welche man die Breite, (3) von Oben nach Unten, welche man die Höhe oder Tiefe nennt.

Setzen wir nun ferner. Das Element soll, wenn es einmal angefangen hat, bei seiner Bewegung einer gewissen Richtung zu Folgen, nach derselben unveränderten Richtung so lange fortgehen, als es kann, ohne zurückzugehen, oder über die Grenzen des Körpers hinauszurücken; so wird es, wofern es angefangen hat, von C nach A zu zu gehen, in dieser Richtung nur bis

nach E fortgehen können. In E wird es zwar nicht mehr in dem Körper, aber doch noch in der Grenze desselben, d. h. in seiner Oberfläche, seyn.

Soll es nun, der Bedingung gemäß, in dieser Grenze bleiben, so kann es nicht weiter über sich, sondern nur noch gerade vor sich nach F, oder hinter sich, nach K, oder auch gegen die rechte Hand, nach H, oder gegen die linke nach G zu kommen. In der Grenze des Körpers bleiben also nur noch die zwei möglichen Richtungen der Bewegung: 1) von Vorne nach Hinten, (2) von der rechten nach der linken Hand, übrig, oder mit andern Worten: bei der Fläche findet also nur noch Ausdehnung nach zwei Richtungen (1) nach der Länge, (2) nach der Breite Statt, und ihr fehlt gänzlich die Ausdehnung nach der Höhe. Ist endlich das Element in F, G, H oder K angelangt, so befindet es sich jetzt in der Grenze der Fläche, und von nun an ist ihm, wofern es den angenommenen Bedingungen gemäß, seinen Lauf fortsetzen soll, keine andere Bewegung mehr übrig, als nach einer

einzigem Richtung, nämlich in F nach F D, in G nach G D, in H nach H C und in K nach K C. Ist es auf solche Art in C oder D angelangt, so hat seine Bewegung ein Ende, weil es jetzt die Stelle erreicht hat, wo die Grenze der Oberfläche des Körpers selbst begrenzt ist, folglich dessen ganze Ausdehnung ein Ende hat.

Der Linie fehlt also die Ausdehnung nach Breite und Höhe, und sie ist bloß nach einer einzigen Richtung, nämlich in die Länge, der Punkt aber ist nach gar keiner, d. h. gar nicht ausgedehnt.

2) Soll ein Körper durch ursprüngliche Raumsbeschreibung erzeugt werden, so muß man zu allererst irgendwo einen Punkt setzen. Läßt man hierauf diesen stetig fort-rücken, so beschreibt er, als selbst unausgedehnt eine Ausdehnung nach einer einzigen Richtung (nach der nämlichen, welcher er selbst bei seiner Bewegung folgt), d. i. eine Linie. Läßt man alsdann die Linie, die schon nach einer Richtung ausgedehnt ist, nach einer andern Richtung sich fortbewegen, so beschreibt sie eine Ausdeh-

nung, die eben deswegen nach zwei Richtungen sich erstrecken muß; d. h. eine Fläche. Bewegt sich endlich die Fläche, die schon nach zwei Richtungen ausgedehnt ist, noch weiter nach einer andern Richtung stetig fort, so muß diese eine Ausdehnung beschreiben, die ebendesswegen nach drei Richtungen sich erstreckt, d. h. einen Körper. Wollte man nun aber auch den Körper auf ähnliche Art nach einer andern Richtung stetig fortführen, so könnte man ihn zwar dadurch nach und nach in andere und andere Stellen des Raumes bringen, aber ohne neue Gestalten im Raume zu erhalten, weil durch Erzeugung des Körpers, als eines vollständigen Raumes, die Raumbeschreibung bereits erschöpft ist.

E r k l ä r u n g 9.

§. 10. Die Richtungen, nach welchen die Ausdehnung der räumlich ausgedehnten Gröſsen sich erstreckt, nennt man auch die Dimensionen (*dimensiones*) derselben, weil man an sie das Maafs anlegen muß, wenn die Quantität solcher Gröſsen bestimmt werden soll.

Zuf. Eine Linie hat also nur eine Dimension, eine Fläche zwey, und ein Körper drey. (§. 9. Anmerk.)

E r k l ä r u n g 10.

§. 11. Eine stetig ausgedehnte Grösse in zwey Theile theilen, heisst die gemeinschaftliche Grenze beyder Theile bestimmen.

Zuf. 1. Demnach wird ein Körper durch Flächen, eine Fläche durch Linien, und eine Linie durch Punkte getheilt (§. 8.).

Zuf. 2. Da der Raum überall, wo man will, begrenzt werden kann (§. 2. Z. 2.), so können auch alle Körper, Flächen und Linien überall getheilt werden.

Zuf. 3. Demnach kann man sich in jeder Fläche unzählige Arten von begrenzten Flächen, und in jedem körperlichen Raume unzählige Arten von Körpern vorstellen, welche sämmtlich als Theile der sie enthaltenden Ausdehnung anzusehen sind.

E r k l ä r u n g 11.

§. 12. Alles, was uns dazu dient, ein Ding von andern zu unterscheiden, heisst ein Merkmal (*nota*) des Dings. Wir unterscheiden aber die Dinge 1) durch ihre Qualität, 2) durch ihre Quantität;

3) durch ihre Stellen im Raume und in der Zeit. Diejenigen Merkmale eines Dings, wodurch dessen Qualität oder Quantität bestimmt wird, heißen *innere*; diejenigen hingegen, wodurch die Stelle des Dings im Raume oder in der Zeit bestimmt wird, heißen *äusere*.

E r k l ä r u n g 12.

§. 13. Dinge, die sich durch kein inneres Merkmal unterscheiden lassen, heißen *identische* (*eadem*).

Zuf. 1. Demnach findet bey identischen Dingen keine andere Verschiedenheit Statt, als in Ansehung der Stelle, die sie im Raume und in der Zeit einnehmen.

Zuf. 2. Wenn man demnach mehrere identische Dinge zugleich an einerley Orte sich vorstellt, so machen sie nicht mehr als ein einziges, oder ein und ebendasselbe Ding (*eadem numero*) aus.

Zuf. 3. Identische Dinge lassen sich also für einander sezen (substituiren.)

E r k l ä r u n g 13.

§. 14. Wenn mehrere Dinge so viele innere Merkmale mit einander gemein ha-

ben, daß sie durch einerley Begriff (in welchem eben diese gemeinschaftlichen Merkmale zusammengefasst sind) sich denken lassen, so heißen sie gleichartig (*homogenea*), im entgegengesetzten Falle ungleichartig (*heterogenea*). So sind z. B. alle möglichen geometrischen Körper unter sich gleichartig, weil sie durch den gemeinschaftlichen Begriff: Ausdehnung nach drey Dimensionen, sich denken lassen. Dagegen sind Körper, Flächen und Linien in so fern unter einander ungleichartig, als sie nicht durch den gemeinschaftlichen Begriff einer Ausdehnung nach gleich vielen Dimensionen gebracht werden können.

E r k l ä r u n g 14.

§. 15. Gleichartige Dinge von einerley Qualität heißen ähnlich (*similia*), von verschiedener, unähnlich (*disfimilia*), von einerlei Quantität gleich (*aequalia*), von verschiedener, ungleich (*inaequalia*). Dinge, welche beydes, ähnlich und gleich sind, heißen congruent (*congruentia*). Din-

ge, die so ungleichartig sind, daß sie weder ähnlich noch gleich seyn können, heißen unvergleichbar (*disparata*), wie z. B. Körper, Flächen und Linien unter einander (§. 14).

Zuf. 1. Gleichartige Dinge sind also entweder ähnlich oder unähnlich, gleich oder ungleich.

Zuf. 2. Aehnliche Dinge lassen sich in Ansehung ihrer Qualität, gleiche in Ansehung ihrer Quantität für einander setzen, und umgekehrt: Dinge die sich in Ansehung der Qualität für einander setzen lassen, sind ähnlich, die sich in Ansehung der Quantität für einander setzen lassen, sind gleich.

Zuf. 3. Aehnliche Dinge sind also innerlich bloß durch ihre Quantität gleiche bloß durch ihre Qualität unterschieden (§. 12.), congruente aber sind identisch, und bloß durch ihre Stelle im Raume und in der Zeit unterscheidbar (§. 13. Z. 1.)

Zuf. 4. Stellt man sich daher mehrere congruente Dinge zugleich an einerley Orte vor, so machen sie nur ein einziges aus. (§. 13. Z. 2.)

E r k l ä r u n g 15.

§. 16. Wenn mehrere gleichartige Größen zusammen genommen als Eins betrachtet werden können, so heißt dies Eine ein

Ganzes, auch ein Aggregat, und von jenen Gröſſen heißt jede ein Theil des Ganzen oder des Aggregats, und alle zusammen, bis auf eine von ihnen, heißen Nebentheile (*compartes*) dieser einen. Jeden Theil, mit allen seinen Nebentheilen zusammen, nennt man auch die wirklichen Theile (*partes actuales*) des Ganzen. Wird hingegen ein Theil mit solchen Theilen zusammengenommen, die nicht seine Nebentheile sind, so nennt man diese mögliche Theile (*potentiales*). In der Folge werden immer wirkliche Theile verstanden, wenn das Wort: Theil ohne Beysatz gebraucht wird.

E r k l ä r u n g 16.

§. 17. Wenn eine Gröſſe in Ansehung einer andern eben so betrachtet werden kann, wie das Ganze in Ansehung des Theils, d. h. als entstanden durch Zusammensetzung dieser andern mit einer oder mehreren gleichartigen, so heißt die erste größer, als die andere, und die andere kleiner als die erste.

E r k l ä r u n g 17.

§. 18. Diejenigen Stücke an den ausgedehnten Gröſſen, von welchen die Bestimmung der Qualität (Gestalt) und Quantität derselben abhängt, wie z. B. bey geradlinigen Figuren die Seiten und Winkel, heißen Bestimmungsstücke dieser Gröſſen.

E r k l ä r u n g 18.

§. 19. Wenn durch gewisse angenommene Bestimmungsstücke einer ausgedehnten Gröſſe von einer gewissen Art, die übrigen mittelbar so bestimmt werden, daß aus den angenommenen nicht mehr als eine ausgedehnte Gröſſe dieser Art sich verzeichnen läſſet, so sagt man, die ausgedehnte Gröſſe sey durch die angenommenen Bestimmungsstücke gegeben.

E r k l ä r u n g 19.

§. 20. Wenn zwey ausgedehnte Gröſſen einer gewissen Art so beschaffen sind, daß, wofern man beyde in einerley Stelle des Raums — also, wenn es Linien oder Flächen sind, auf einander, wenn es Kör-

per sind, in einander gebracht — sich vorstellt, die sämtlichen Grenzen und die von ihnen eingeschlossenen Ausdehnungen beyder gänzlich zusammenfallen, so daß beyde nur als eine Grösse dieser Art angesehen werden können, so sagt man: die beyden ausgedehnten Gröfsen decken einander (*congruunt*).

Zuf. Weil das Decken nach dieser Erklärung nur bey solchen Gröfsen Statt finden kann, die beydes, gleich und ähnlich sind; so hat man Gröfsen, die diese gedoppelte Eigenschaft haben, *congruente* genannt (§. 15.)

G r u n d s a z 1.

§. 21. Jede Grösse ist sich selbst gleich.

G r u n d s a z 2.

§. 22. Von zwey gleichartigen Gröfsen ist immer die eine grösser, eben so groß, oder kleiner, als die andere; und mithin ist von zwey ungleichen Gröfsen immer die eine grösser oder kleiner, als die andere.

G r u n d s a z 3.

§. 23. Das Ganze ist seinen Theilen zusammengekommen gleich.

G r u n d s a z 4.

§. 24. Das Ganze ist größer, als sein Theil.

G r u n d s a z 5.

§. 25. Zwey Gröſſen, die einer dritten gleich sind, sind einander selbst gleich.

G r u n d s a z 6.

§. 26. Die Doppelten von einerley Gröſſe sind einander gleich.

G r u n d s a z 7.

§. 27. Die Hälften von einerley Gröſſen sind einander gleich.

G r u n d s a z 8.

§. 28. Wenn man zu Gleichem Gleiches hinzusetzt, so sind die Aggregate gleich.

G r u n d s a z 9.

§. 29. Wenn man von Gleichem Gleiches wegnimmt, so sind die Reste gleich.

G r u n d s a z 10.

§. 30. Die Quantität eines aus zwey Theilen bestehenden Aggregats bleibt unverän-

dert, wenn der eine Theil um eben so viel wächst, um wie viel der andere abnimmt.

G r u n d s a t z 11.

§. 31. Wenn man zu Ungleichem Gleiches hinzusetzt, so sind die Aggregate ungleich; d. h. wenn man zum Grösseren und Kleineren Gleiches hinzusetzt, so ist das erste Aggregat grösser, als das andere.

G r u n d s a t z 12.

§. 32. Wenn man von Ungleichem Gleiches wegnimmt, so sind die Reste ungleich; d. h. wenn man vom Grösseren und Kleineren Gleiches wegnimmt, so ist der erste Rest grösser, als der andere.

G r u n d s a t z 13.

§. 33. Wenn man von Gleichem Ungleiches wegnimmt, so sind die Reste ungleich; d. h. wenn man von der nämlichen Grösse eine kleinere und grössere wegnimmt, so ist der erste Rest grösser, als der andere.

G r u n d s a t z 14.

§. 34. Eine Grösse, die grösser ist, als eine von zwey gleichen Grössen, ist auch grösser, als die andere.

G r u n d s a z 15.

§. 35. Eine Grösse die kleiner ist, als eine von zwey gleichen Grössen, ist auch kleiner, als die andere.

G r u n d s a z 16.

§. 36. Eine Grösse, die grösser ist, als die grössere von zwey ungleichen Grössen, ist noch vielmehr grösser, als die kleinere.

G r u n d s a z 17.

§. 37. Eine Grösse, die kleiner ist, als die kleinere von zwey ungleichen Grössen, ist noch vielmehr kleiner, als die grössere.

G r u n d s a z 18.

§. 38. Eine Grösse, die grösser ist, als das Ganze, ist noch vielmehr grösser, als ein Theil des Ganzen.

G r u n d s a z 19.

§. 39. Eine Grösse, die kleiner ist, als ein Theil des Ganzen, ist noch vielmehr kleiner, als das Ganze.

G r u n d s a z 20.

§. 40. Ausgedehnte Grössen, die einander decken (*congruentia*), sind einander gleich.

A n m e r k u n g 1.

Alle diese Grundsätze sind zwar keine eigentlichen Axiome, d. h. ursprüngliche Grundsätze, die einer Ableitung aus höheren Gründen eben so wenig fähig, als bedürftig wären; sondern sie sind abgeleitet, d. h. solche Grundsätze, die sich, theils unmittelbar aus dem Satze des Widerspruchs, theils aus andern vorangeschickten Sätzen durch leichte Folgerungen ableiten lassen. Allein da auf der einen Seite ihre Ableitung so leicht und einfach, auf der andern aber ihr Gebrauch so häufig und ausgebreitet ist, so ist es viel besser gethan, sie, nach Euklid's Beyspiele, herauszuheben und unter dem Titel von Grundsätzen zusammenzustellen, als sie jenen früheren Sätzen, aus welchen sie fließen, einzeln und zerstreut, als Zusätze anzuhängen, weil durch die erste Behandlungsart die Aufmerksamkeit mehr auf sie hingezogen, ihre Wichtigkeit für das Ganze des Systems einleuchtender, und dem Gedächtnisse das Auffassen und Behalten derselben, so wie dem Verstande ihre Anwendung, viel leichter gemacht wird, als durch die letzte.

A n m e r k u n g 2.

Die ersten neunzehn dieser Grundsätze sind der gesamten Mathematik gemein, und in allen Theilen derselben von dem ausgebreitetsten Gebrauche; der zwanzigste aber gehört der Geometrie eigenthümlich an, und macht unter dem Namen des Princip der Congruenz den eigentlichen Grundstein in dem Gebäude dieser Wissenschaft aus.

A n m e r k u n g 3.

Bey Beurtheilung der Congruenz ausgedehnter Gröſſen nach diesem Princip hat man sich vor zwey entgegengesetzten Abwegen zu hüten, deren einer die technische, der andere die philosophische Ansicht genannt werden kann.

Die technische Ansicht von dem Princip der Congruenz würde man alsdann haben, wenn man sich vorstellen wollte, man müſſte, um die Congruenz ausgedehnter Gröſſen zu beurtheilen, die den Begriffen dieser Gröſſen — deren Versinnlichung durch Darlegung in der Anschauung vermittelt

geometrischer Constructionen (durch Zirkel und Lineal), der Geometrie verstat-
tet ist, — entsprechenden Objecte durch
technische Constructionen aus irgend ei-
ner Materie, z. B. Papier, Pappe, Holz etc.
bilden und zu Stande bringen, und so, als
empirische Erscheinungen, den Sinnen ver-
gegenwärtigen, um sie alsdann über einan-
der legen, und mit Hülfe der Sinne (des Ge-
sichts, oder Gefühls, oder beyder) ausma-
chen zu können, ob sie auch allerwärts auf
einander passen oder nicht. Eine solche Vor-
stellungsart ist mit dem Begriffe einer reinen
Vernunftwissenschaft, dergleichen die Geo-
metrie (Einleitung §. 1.) ist, die eben so
wenig empirischer Hülfsmittel sich bedie-
nen, als empirische Gründe borgen darf, de-
ren Sätze sämmtlich in dem Prädicate der
Allgemeinheit und Nothwendigkeit den Be-
glaubigungsschein ihrer höheren Abkunft
aufweisen können, deren Sache es also nie
seyn kann, durch Versuche zu erfor-
schen, ob etwas so oder nicht so
sey, sondern apodictisch zu bewei-
sen, daß es so, und nicht anders,
seyn müsse, ganz unverträglich.

Die philosophische Ansicht von dem Princip der Congruenz würde man haben, wenn man diesen Grundsatz für gleichbedeutend nähme mit dem: Ausgedehnte Gröfsen, die beydes, gleich und ähnlich sind, lassen sich für einander setzen (substituiren), und nun die ganze Beurtheilung der Congruenz zweyer ausgedehnten Gröfsen darauf zurückführen wollte, dafs man in allen Fällen nur zu untersuchen hätte, ob in beyden Gröfsen so viele und solche Bestimmungsstücke gleich und ähnlich wären, dafs durch sie alle übrigen, und mithin die ganzen Gröfsen, gegeben, d. h. vollständig bestimmt wären, in welchem Falle man alsdann zu der Folgerung berechtigt wäre, dafs auch alle übrigen Bestimmungsstücke, und mithin die ganzen Gröfsen selbst gleich und ähnlich seyn müßten, weil sonst die letzten durch die ersten nicht gegeben wären.

Dafs diese Vorstellungsart dem Geiste der Geometrie eben so sehr zuwider sey, als die technische, erhellet aus folgenden Gründen:

1) Nach dieser Vorstellungsart verwandelt sich jeder Beweis von der Congruenz zweyer ausgedehnten Gröſen in eine Schlussreihe aus den bloſen Begriffen der Gleichheit, Aehnlichkeit, der auf beyden beruhenden Möglichkeit der Substitution und des Gegeben - oder Bestimmtheits, und die Constructionen spielen dabei eigentlich eine ganz müſſige Rolle. Aber eben dadurch verlieren diese Beweise den Rang geometrischer Demonstrationen, weil ihnen die Nachweisung in der Anschauung (*αποδείξις*) fehlt. Daher die Benennung: philosophische Ansicht (Einleitung §. 1.).

2) Daſs durch gewisse angenommene Bestimmungsstücke einer ausgedehnten Gröſſe mittelbar jedes der übrigen, und mithin auch die ganze Gröſſe, gegeben ſey, läſſt ſich aus bloſen Begriffen nie geometriſch demonſtriren, weil der Geometer überhaupt mit bloſen Begriffen nichts ausrichten kann. (Einleitung §. 5.).

3) Wenn aber das auch anginge, ſo würde es doch nicht wohl gethan ſeyn,

davon Gebrauch zu machen, weil dadurch für ihn doch nichts weiter zu erhalten stünde, als daß er hier, — wie der Philosoph, aus Noth, überall thun muß, — sich damit begnügen müßte, das Einzelne im Allgemeinen zu erkennen, statt daß er es sonst als einen der ersten Vorzüge seiner Wissenschaft schätzt, überall das Allgemeine im Einzelnen zu erforschen. (Einleitung. §. 5.)

So kann z. B. Euklid aus dem einzelnen Saze: „Wenn in zwey gegebenen Dreyecken zwey Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel stückweise gleich sind, so sind die ganzen Dreyecke congruent,“ den allgemeinen folgern: „durch zwey Seiten und den eingeschlossenen Winkel ist ein Dreyeck gegeben.“

Herr Schulz hingegen, der die philosophische Ansicht des Principis der Congruenz gewählt hat, * hat sich mit grosfer

* Anfangsgründe der reinen Mathesis. Königsberg 1790 (Geom. §. 11. Anm. 1. §. 70. ff.

Mühe den Vorthail errungen, den entgegengesetzten Weg gehen, und aus dem letzten allgemeinen — aber durchaus nicht geometrisch erweislichen Saze den ersten einzelnen herleiten zu können!

Mitten zwischen diesen beyden Abwegen liegt nun der rechte Weg der ächt geometrischen Ansicht von dem Princip der Congruenz, welche man nur dann hat, wenn man diesen Grundsatz zu Beurtheilung der Congruenz ausgedehnter Gröfsen so anwendet, wie er von den Alten beständig dazu angewandt worden ist. Diese Bedingung kann aber nicht anders erfüllt werden, als, wenn man in jedem Falle, wo die Congruenz zweyer ausgedehnten Gröfsen einer gewissen Art zu untersuchen ist, einige der, von einander abhängigen Bestimmungsstücke beyder als gleich annimmt, und alsdann vermittelst der Construction zeigt, wie daraus nothwendig folge, dafs, wofern man beyde in einerley Stelle des Raums gebracht sich vorstellt, 1) Congruenz aller übrigen Bestimmungsstücke beyder, 2) also auch völlige Congruenz beyder, ihrer ganzen Aus-

dehnung nach; 3) mithin auch Gleichheit beyder und aller ihrer Bestimmungsstücke vermöge der Congruenz Statt finden müsse. Dadurch wird dann immer zugleich die Folgerung begründet, daß durch die angenommenen Stücke eine ausgedehnte Grösse dieser Art vollständig bestimmt oder gegeben werde.

Das vollkommenste Muster einer solchen Anwendung dieses Grundsatzes hat Euklid in dem Beweise des ersten Lehrsatzes der Elemente gegeben. Daß die Worte: auf oder über einander legen oder bringen, in einander schieben oder stecken, welche in diesem und andern ähnlichen Beweisen gebraucht werden, hier keine physischen oder technischen, an materialen Objecten der Erscheinungswelt, vorzunehmenden Handlungen bezeichnen, ergiebt sich, aus dem bereits Gesagten, von selbst. Man muß also bei diesen Ausdrücken jedesmal den Beysatz: in der Einbildung, hinzudenken; denn sie bezeichnen alle einen reinen Act der productiven Einbildungskraft, der, so wie die sche-

matischen Constructionen, — von welchen die mechanischen immer nur sehr unvollkommene Nachbildungen sind, — von ihr einzig und allein, ohne alle fremde Beihülfe zu Stande gebracht wird. Sollte indessen doch jemand an diesen Ausdrücken Anstoß nehmen, der mag immerhin dafür setzen: beyde ausgedehnte Gröfsen in einerley Stelle des Raums sich denken, oder auch: vermittelt der ursprünglichen Raumsbeschreibung beyde nach einander, von einerley Grenze aus, in einerley Ordnung, und Folge ihrer Theile, erzeugen.

I. Buch. Geometrie.

B. Epipedometrie.

1. Von der geraden Linie.

Erklärung 20.

§. 41.

Eine Linie wird durch stetige Bewegung eines Punkts beschrieben. (§. 9.) Bey jeder Bewegung läßt sich nun ein *Terminus a quo*, wovon das Bewegliche ausgeht, und ein *terminus ad quem*, dem es durch seine Bewegung entgegenstrebt, unterscheiden. Jenes kann der Anfang, dieses das Ziel der Bewegung heißen. Einerley Ziel erfordert, für jeden Anfang, einerley Tendenz nach dem Ziele. Die Tendenz des Beweglichen nach dem Ziele drückt sich aus an seinem Wege, oder: sein Weg ist das Schema dieser Tendenz in der schematischen, oder die Spur derselben in der geometrischen oder mechanischen Construc-

tion, und in so fern wird ihm eine gewisse Richtung beygelegt. Hat nun das Bewegliche während seiner ganzen Bewegung, nur ein Ziel, so bleibt auch seine Tendenz nach diesem Ziele vom Anfange bis ans Ende eine und ebendieselbe, folglich bleibt auch die Richtung seines Weges, an welcher diese Tendenz sich ausdrückt, unverändert, d. h. sein Weg ist eine gerade Linie. Gedenkt man sich daher diesen ganzen Weg in eine willkührliche Anzahl von Abschnitten, so groß oder so klein, wie man will, getheilt, so wird das bewegliche Element, vorausgesetzt, daß es während seiner ganzen Bewegung nur ein Ziel habe, in was für einem unter den nachfolgenden Abschnitten seine Bewegung auch ihren Anfang nehmen mag, immer das nämliche Ziel erreichen, was es wirklich erreicht, wenn es von dem Anfangspunkte des ersten Abschnitts ausgeht. Und eben auf diese Vorstellung von der Entstehungsart der geraden Linie gründet sich die richtige Definition derselben, nach welcher man sie für eine solche erklärt, die zwischen

ihren Endpunkten gleichförmig, d. h. eben so liegt, wie jeder ihrer Theile zwischen den seinigen; daher man auch von einem Endpunkte der ganzen zum andern, nicht anders kommen kann, als durch die Endpunkte aller ihrer Theile.

Hat hingegen das bewegliche Element in jedem folgenden Zeittheile ein anderes Ziel, als im vorhergehenden, so ist auch seine Tendenz und mithin auch die Richtung seines Wegs, in jedem folgenden Zeittheile eine andere, als im vorhergehenden, d. h. kein Theil seines Weges ist gerade, oder: sein Weg ist eine krumme Linie. Gedenkt man sich daher wiederum diesen ganzen Weg in Abschnitte von willkührlicher Zahl und Ausdehnung getheilt, so wird sich für keinen dieser Abschnitte ein Ziel angeben lassen, das mit dem, am Ende des ganzen Weges wirklich erreichten, zusammenträfe; sondern von wie vielen und welchen der auf einander folgenden Abschnitte aus das Element seine Bewegung beginnen mag, so wird es immer in andern und andern Punkten anlangen; daher kann man

auch in einer krummen Linie von dem einen Endpunkte der ganzen zum andern, noch durch unendlich viele andere Punkte, als durch die Endpunkte ihrer Theile, kommen.

Demnach ist eine gerade Linie ein Schema der Tendenz eines beweglichen Punktes, der während der ganzen Zeit seiner Bewegung nur ein Ziel hat; eine krumme Linie hingegen ist ein Schema der Tendenz eines beweglichen Punktes, der in jedem Augenblicke seiner Bewegung ein anderes Ziel hat.

Z u s. 1. Jeder Theil einer geraden Linie ist also auch gerade, und jeder Theil einer krummen Linie auch krumm.

Z u s. 2. Da sich von keiner geraden Linie eine andere Qualität angeben läßt, als daß alle ihre Theile einerley Richtung haben, so haben alle geraden Linien einerley Qualität, und sind mithin einander ähnlich. (§. 15.)

Z u s. 3. Also ist auch jeder Theil der geraden Linie dem Ganzen ähnlich. (Z. 1.)

Z u s. 4. Gleiche gerade Linien sind also gleich und ähnlich (Z. 2.); für sie läßt sich daher der Grundsatz der Congruenz umkehren,

und behaupten: gerade Linien, die einander gleich sind, decken einander.

A n m e r k u n g.

Die obige Erklärung mit den dazu gehörigen Erörterungen hat nicht die Absicht, Jemanden eine Vorstellung von der geraden Linie erst zu verschaffen. Dies würde eine eben so vergebliche Bemühung seyn, als wenn jemand einem andern von der rothen Farbe durch eine bloße Erklärung, und ohne ihm ein Object, das diese Farbe hätte, vorzuzeigen, eine Vorstellung verschaffen wollte. Vielmehr giebt der Geometer, indem er an jeden, der sich in seiner Wissenschaft unterrichten lassen will, die Forderung macht, eine gerade Linie ziehen zu können, deutlich genug zu erkennen, daß er die Vorstellung der geraden Linie als in und mit der intuitiven Vorstellung des Raums selbst unmittelbar *a priori* gegeben voraussetze. Bei der Erklärung, die er von der geraden Linie giebt, kann es ihm also blos darum zu thun seyn, das unterscheidendste und fruchtbarste Merkmal derselben herauszuheben, um

vermittelst dessen die Eigenschaften und Verhältnisse gerader Linien, an sich und wie fern sie als Grenzen anderer Ausdehnungen betrachtet werden, aufzufinden. Auf das Prädicat eines solchen Merkmals kann nun kein anderes mit gleichem Rechte Anspruch machen, wie das: Identität der Richtung der Theile und des Ganzen, daher wir auch die Erklärung, die dieses Merkmal aussagt, hier zum Grunde legen werden.

Forderung 1.

§. 42. Von jedem Punkte nach jedem andern eine gerade Linie zu ziehen.

Forderung 2.

§. 43. Eine begrenzte gerade Linie nach beyden Seiten stetig in gerader Richtung ohne Ende fort zu verlängern.

Axiom 1.

§. 44. Zwischen zwey Punkten ist nicht mehr, als eine gerade Linie, möglich.

Zus. 1. Durch zwey Punkte ist also die gerade Linie zwischen ihnen, ihrer Lage und Länge nach, gegeben.

schaffen ist, daß jede gerade Linie, die man zwischen zwey in ihr angenommenen Punkten ziehen mag, ganz in sie fällt. Eine krumme Fläche hingegen ist eine solche, von welcher kein Theil eben ist,

E r k l ä r u n g 25.

§. 50. Eine Ebene durch einen oder mehrere gegebene Punkte legen, heißt ihr eine solche Lage geben, daß die gegebenen Punkte in sie fallen.

E r k l ä r u n g 26.

§. 51. Eine gerade Linie wird durch jeden Punkt, eine Ebene durch jede gerade Linie in ihr, und ein Körper durch jede Ebene in ihm in zwey Theile getheilt, die auf entgegengesetzten Seiten der Theilungsgrenze liegen, und mithin in Ansehung derselben eine entgegengesetzte Lage haben.

F o r d e r u n g 3.

§. 52. Durch jeden gegebenen Punkt eine Ebene zu legen.

A n m e r k u n g.

Dafs und wie dies möglich sey, kann nicht gezeigt, sondern muß als ein Stück der ursprünglichen Raumsbeschreibung, schlechthin gefordert werden. Kann man aber dies, so kann man hernach auch die Ebene um den gegebenen Punkt nach allen Seiten, wie man will, drehen, bis sie in eine solche Lage kommt, dafs ein zweyter gegebener Punkt auch in sie fällt. Hat man es dahin gebracht, so liegt nun auch die gerade Linie, welche diese beyden Punkte verbindet, ganz in ihr (§. 49.); um diese kann sie also noch so lange gedreht werden, bis irgend ein dritter Punkt ausser dieser Linie auch noch in sie zu liegen kommt.

F o r d e r u n g 4.

§. 53. Jede Ebene nach beyden entgegengesetzten Seiten einer jeden geraden Linie, die in ihr liegt, ohne Ende fort zu erweitern.

E r k l ä r u n g 27.

§. 54. Von einem Punkte und einer Linie sagt man, sie liegen ausserhalb einer

Zus. 2. Theils aus diesem, theils aus einem andern, erst späterhin zu entdeckenden Grunde, wird der Abstand zweyer Punkte durch die gerade Linie bestimmt, die sich von dem einen nach dem andern ziehen läßt.

A x i o m 2.

§. 45. Durch zwey Punkte ist nach beyden Seiten ohne Ende fort nicht mehr, als eine gerade Linie möglich.

Zus. 1. Sobald daher eine gerade Linie mit einer andern nur zwey Punkte gemein hat, so sind beyde Linien, ohne Ende verlängert, nur eine einzige.

Zus. 2. Zwey gerade Linien können also nicht mehr, als einen Punkt mit einander gemein haben, folglich auch keinen Raum einschliesen.

E r k l ä r u n g 21.

§. 46. Ein Punkt liegt ausserhalb einer Linie, wenn er weder in ihr selbst, noch in ihrer Verlängerung liegt.

Zus. Da man im Raume überall Punkte annehmen kann, (§. 2. Zus. 2.) so sind von jedem Punkte aus nach allen Seiten unzählig viele gerade Linien möglich, (§. 42.)

E r k l ä r u n g 22.

§. 47. Wenn man verschiedene gerade Linien, die so mit einander zusammenhangen, daß immer der Endpunkt der vorhergehenden zugleich der Anfangspunkt der nachfolgenden ist, zusammen als eine einzige Linie betrachtet, so heißt diese eine gebrochene Linie. Betrachtet man hingegen mehrere gerade und krumme Linien, die auf die eben beschriebene Art mit einander zusammenhangen, als eine einzige Linie, so heißt diese eine gemischte Linie.

E r k l ä r u n g 23.

§. 48. Jeder Theil einer krummen Linie heißt ein Bogen von ihr, und die gerade Linie, welche die Endpunkte der krummen Linie oder eines Bogens derselben verbindet, heißt eine Sehne der krummen oder ihres Bogens.

E r k l ä r u n g 24.

§. 49. Eine Fläche heißt eben oder eine Ebene (*Planum*), wenn sie so be-

schaffen ist, daß jede gerade Linie, die man zwischen zwey in ihr angenommenen Punkten ziehen mag, ganz in sie fällt. Eine krumme Fläche hingegen ist eine solche, von welcher kein Theil eben ist.

Erklärung 25.

§. 50. Eine Ebene durch einen oder mehrere gegebene Punkte legen, heißt ihr eine solche Lage geben, daß die gegebenen Punkte in sie fallen.

Erklärung 26.

§. 51. Eine gerade Linie wird durch jeden Punkt, eine Ebene durch jede gerade Linie in ihr, und ein Körper durch jede Ebene in ihm in zwey Theile getheilt, die auf entgegengesetzten Seiten der Theilungsgrenze liegen, und mithin in Ansehung derselben eine entgegengesetzte Lage haben.

Forderung 3.

§. 52. Durch jeden gegebenen Punkt eine Ebene zu legen.

A n m e r k u n g.

Dafs und wie dies möglich sey, kann nicht gezeigt, sondern muß als ein Stück der ursprünglichen Raumsbeschreibung, schlechthin gefordert werden. Kann man aber dies, so kann man hernach auch die Ebene um den gegebenen Punkt nach allen Seiten, wie man will, drehen, bis sie in eine solche Lage kommt, dafs ein zweyter gegebener Punkt auch in sie fällt. Hat man es dahin gebracht, so liegt nun auch die gerade Linie, welche diese beyden Punkte verbindet, ganz in ihr (§. 49.); um diese kann sie also noch so lange gedreht werden, bis irgend ein dritter Punkt ausser dieser Linie auch noch in sie zu liegen kommt.

F o r d e r u n g 4.

§. 53. Jede Ebene nach beyden entgegengesetzten Seiten einer jeden geraden Linie, die in ihr liegt, ohne Ende fort zu erweitern.

E r k l ä r u n g 27.

§. 54. Von einem Punkte und einer Linie sagt man, sie liegen ausserhalb einer

Ebene, wenn sie weder in der Ebene selbst noch in ihrer Fortsetzung liegen.

A n m e r k u n g 1.

Hier muß einmal für immer bemerkt werden, daß alle Constructionen, womit man es in diesem Theile der Geometrie zu thun hat, in einerley Ebene zu Stande gebracht werden müssen. Demnach ist auch der Sinn der Forderung 2. (§. 43.) kein anderer, als der: eine begrenzte gerade Linie in der Ebene, die durch ihre Endpunkte geht, und durch die Bedingungen des Satzes bestimmt wird, stetig in gerader Richtung zu verlängern.

Ebendies ist auch der Grund der Benennung: *Epipedometrie* von *ἐπιπεδος* die Ebene.

A n m e r k u n g 2.

Manche theilen zwar die Geometrie nach der Zahl der Klassen ihrer Objecte, nämlich der Linien, Flächen und Körper, in drey Theile, die sie unter dem Namen der *Longimetrie*, *Planimetrie* und *Stereometrie* abhandeln. Allein da wir von

den Linien, so lange wir sie blos an sich, nicht als Grenzen der Flächen betrachten, welche sie einschliesen, wenig oder nichts zu sagen wissen, so ist die dichotomische Eintheilung dieser Wissenschaft in die Epipedometrie, welche die Ebenen, nebst ihren Grenzen, den Linien, und in die Stereometrie, welche die körperlichen Räume zum Gegenstande ihrer Untersuchungen macht, nicht nur völlig zureichend, sondern auch der Natur der Sache angemessener. Der Geometer kann sich daher an die Schulordnung, nach welcher nur das unter einerley Titel vorgetragen wird, was dem Namen nach zusammengehört, nicht binden, sondern hat in Absicht auf die Darstellung und Verbindung seiner Sätze kein anderes Gesetz zu beobachten, als das: nirgends einen Satz aufzustellen, der nicht durch die früheren gehörig begründet wird; (Einleitung §. 39.) Bastardworte aber, wie Longimetrie, Planimetrie u. d. m. sollte man billig den Feldmesfern, von welchen sie auch wohl ursprünglich herrühren mögen — überlassen, da sie im

wissenschaftlichen Vortrage Flecken sind, an welchen ein gebildeter Leser immer Anstoß nehmen wird.

E r k l ä r u n g 28.

§. 55. Wenn zwey Linien einen Punkt gemein haben, so sagt man: sie stossen oder laufen in demselben zusammen (*concurrunt*), und der Punkt heißt der Punkt des Zusammenstossens (*punctum concursus*). Werden sie sodann über diesen Punkt hinaus verlängert, so schneiden oder berühren sie einander; jenes, wenn die Theile der einen, welche auf entgegengesetzten Seiten des gemeinschaftlichen Punktes liegen, zugleich auch auf entgegengesetzten Seiten der andern, dieses hingegen, wenn sie auf einerley Seite der andern Linie liegen. In jenem Falle heißt der gemeinschaftliche Punkt der Durchschnittspunkt (*punctum intersectionis*), in diesem der Berührungspunkt (*punctum contactus*).

Zus. 1. Zwey gerade Linien können also bloß in einem einzigen Punkte zusammen-

stossen, und sich auch nur in einem einzigen Punkte schneiden. (§. 45. Z. 2.).

Zuf. 2. Zwey gerade Linien können einander nicht bloß berühren.

Zuf. 3. Wenn zwey Punkte auf entgegengesetzten Seiten einer geraden Linie liegen, so muß jede gerade Linie, die diese Punkte verbindet, die dazwischen liegende in irgend einem Punkte schneiden. Denn wenn die Verbindungslinie nicht durch die gemeinschaftliche Grenze der beyden entgegengesetzten Theile der Ebene ginge, so hinge der diesseits dieser Grenze liegende Theil von ihr mit dem jenseits derselben liegenden nicht zusammen, und folglich wäre die Linie nicht stetig, wider (§. 9. Z. 1.).

E r k l ä r u n g 29.

§. 56. Wenn in einer Ebene von einem und demselben Punkte zwey verschiedene Linien ausgehen, so nennt man die Abweichung (*divaricatio*) der Richtungen dieser beyden Linien von einander einen ebenen Winkel, die beyden Linien, welche den Winkel bilden, heißen die Schenkel (*crura*), und der Punkt, von welchem sie ausgehen, der Scheitel oder die Spitze (*vertex*) des Winkels. Der ebene Win-

kel ist 1) geradlinig (*rectilineus*), wenn seine beyden Schenkel gerade — 2) krummlinig (*curvilineus*), wenn beyde krumme Linien sind; 3) vermischtlinig (*mixtilineus*), wenn der eine Schenkel eine gerade, der andere eine krumme Linie ist.

Zuf. 1. Jede zwey zusammenstossende gerade Linien machen einen ebenen geradlinigen Winkel, denn sie können immer als von einerley Punkte in derselben Ebene ausgehend angesehen werden (§. 55.)

Zuf. 2. Die Quantität eines Winkels hängt lediglich von der Abweichung der Richtung seiner beyden Schenkel ab, und ist mithin von der Länge der letzteren ganz unabhängig.

Zuf. 3. Die Gleichheit oder Ungleichheit zweyer Winkel wird unmittelbar nach dem Princip der Congruenz beurtheilt. Wenn man sich nämlich vorstellt, die Scheitelpunkte und zwey von den Schenkeln beyder Winkel werden übereinander gebracht, so fallen die beyden andern Schenkel entweder auch aufeinander, oder nicht. Ist jenes, so decken die beyden Winkel einander und sind also einander gleich (§. 40.); ist aber dieses, so decken sie einander nicht, und sind ungleich, und zwar ist derjenige der grössere, dessen Schenkel die Schenkel des andern einschliessen (§. 24.).

Zuf. 4. Für ebene geradlinige Winkel läßt sich also der Grundsatz der Congruenz auch umkehren, und behaupten: geradlinige Winkel, die einander gleich sind, decken auch einander.

E r k l ä r u n g 30.

§. 57. Wenn in einer Ebene von dem nämlichen Punkte drey gerade Linien so ausgehen, daß die beyden äusseren (auf entgegengesetzten Seiten des gemeinschaftlichen Punktes) in einer geraden Linie liegen, so bildet die mittlere mit diesen zwey Winkel, welche Nebenwinkel (*anguli contigui s. deinceps positi*) heißen.

Nebenwinkel sind also solche Winkel, die den Scheitel und einen Schenkel gemein haben, während die beyden andern Schenkel in einer geraden Linie liegen.

Sind die beyden Nebenwinkel einander gleich, so heißt jeder von ihnen ein rechter (*angulus rectus*) und die mittlere Linie steht auf jeder der beyden äussern lothrecht (*perpendicularis*) und heißt daher ein auf diesen aufgestelltes Loth (*perpendicularum, s. cathetus*). Sind hingegen die bey-

den Nebenwinkel ungleich, so heisst jeder von ihnen ein schiefer Winkel (*angulus obliquus*) und die mittlere Linie, welche sie mit den beyden äusseren bildet, steht auf diesen schief. Ein schiefer Winkel ist entweder grösser, als ein rechter, und heisst stumpf (*obtusus*), oder er ist kleiner, als ein rechter, und heisst spiz (*acutus*).

Verlängert man die mittlere Linie, welche mit zwey andern — gleiche oder ungleiche — Nebenwinkel macht, über den gemeinschaftlichen Scheitelpunkt dieser Winkel hinaus, so entstehen, auf entgegengesetzten Seiten dieses Punkts, zwey Paare von Winkeln, die einen gemeinschaftlichen Scheitel haben, und deren Schenkel paarweise in einer geraden Linie liegen; diese heissen Scheitelwinkel (*anguli verticales*).

A n m e r k u n g. 1.

Man bezeichnet die Winkel entweder nur mit einem Buchstaben, der an ihren Scheitel gesetzt wird, oder mit drey Buchstaben, wovon der mittlere an den Scheitel, die bey-

den äusseren aber an die Endpunkte der Schenkel zu stehen kommen.

A n m e r k u n g 2.

Aus der vorigen Erklärung erhellet von selbst, dass die Benennung: Winkel, eigentlich nur von solchen Winkeln gebraucht werde, die kleiner, als zwey rechte, sind, und hohle oder auswärtsgehende Winkel (*anguli concavi*) genannt werden. Indessen kommen doch Fälle vor, wo es unvermeidlich ist, auch solche Winkel zu betrachten, die grösser, als zwey rechte, sind, und erhabene, oder einwärtsgehende Winkel (*anguli convexi s. gibbi*) heissen.

In der Folge soll jedoch das Wort: Winkel, so oft es ohne Beysatz vorkommt, nach dem Beyspiele der Alten, immer in der ersten Bedeutung gebraucht werden.

E r k l ä r u n g 31.

§. 58. Jeder völlig begrenzte Raum wird eine Figur genannt; doch gebraucht man diesen Namen gewöhnlich im engern Ver-

stande nur zu Bezeichnung begrenzter Flächenräume.

Eine nach allen Seiten völlig begrenzte Ebene heißt eine ebene Figur. Diese ist 1) geradlinig (*rectilinea*), wenn sie lauter gerade Linien; 2) krummlinig (*curvilinea*), wenn sie eine oder mehrere krumme Linien zu Grenzen hat; 3) vermischtlinig (*mixtilinea*), wenn sie von geraden und krummen Linien begrenzt wird.

Jede Grenzlinie macht eine Seite (*latus*), alle zusammen den Umfang oder Umriß (*perimeter*, oder, wenn die Figur von einer einzigen krummen Linie eingeschlossen ist, *peripheria*) und der Raum, den sie ringsum einschliesen, der Inhalt oder Flächenraum (*area*) der Figur aus.

Eine ebene geradlinige Figur von lauter gleichen Seiten und Winkeln heißt eine regelmässige (*regularis*), von ungleichen Seiten oder Winkeln, eine unregelmässige (*irregularis*).

Jeder Scheitel eines Winkels, welcher zwey Seiten der Figur zu Schenkeln hat, heißt eine Ecke. Eine gerade Linie, die

von einer Ecke zur andern geht, ohne eine Seite der Figur zu seyn, heisst eine Diagonallinie (*diagonalis*).

Zählt man in zwey geradlinigen Figuren, die gleich viele Seiten haben, von einer Seite oder von einem Winkel an, die übrigen Seiten und Winkel beyder nach einerley Richtung und Folge; so heissen jede zwey Seiten und Winkel beyder Figuren, denen einerley Ordnungszahl zukommt, gleichnamige (*latera homologa, anguli homologi*).

Zuf. 1. Da zwey gerade Linien keinen Raum einschliesen (§. 45. Z. 2.), so ist eine geradlinige Figur von zwey Seiten unmöglich, und folglich muss eine geradlinige Figur zum wenigsten drey Seiten haben.

Zuf. 2. Jede geradlinige Figur hat eben so viele Ecken oder Winkel, als Seiten. Denn da zwey gerade Linien nur in einem Punkt zusammenstossen (§. 55. Z. 1.), so macht die erste Seite mit der zweyten eine Ecke, die zweyte mit der dritten die zweyte Ecke u. s. w. mit allen übrigen.

Zuf. 3. Wenn ein Punkt innerhalb und ein anderer ausserhalb einer ebenen Figur liegt, so muss jede Linie von jenem nach diesem den Um-

fang der Figur zum wenigsten in einem Punkte schneiden (§. 55. Z. 3.).

Zus. 4. Eine gerade Linie, die innerhalb einer ebenen Figur liegt, schneidet, verlängert, den Umfang derselben wenigstens in zwey Punkten. Denn da sie nach beyden Seiten ohne Ende verlängert werden kann (§. 43.), so liegt nach jeder Seite hin allemal ein Punkt von ihr ausserhalb der Figur, folglich schneidet sie den Umfang derselben zum wenigsten in zwey Punkten (Z. 3.).

E r k l ä r u n g 32.

§. 59. Eine Figur, die von einer einzigen Linie so eingeschlossen wird, daß alle, von ihr aus nach einem innerhalb der Figur befindlichen Punkte gehende gerade Linien einander gleich sind, heisst ein Kreis; dieser Punkt des Kreises Mittelpunkt (*centrum*), und die einschliessende Linie die Kreislinie oder der Umkreis (*periphēria*). Jede gerade Linie aus dem Mittelpunkte nach dem Umkreise heisst ein Halbmesser (*radius*) und jede durch den Mittelpunkt gehende und auf beyden Seiten von dem Umkreise begrenzte gerade Linie heisst ein Durchmesser (*diameter*).

Zuf. 1. Alle Halbmesser des Kreises sind einander gleich (p. d. ef.)

Zuf. 2. Der Durchmesser ist das Doppelte des Halbmessers (p. d. ef.); folglich sind auch alle Durchmesser einander gleich (§. 26.).

E r k l ä r u n g 33.

§. 60. Der von der Kreislinie völlig begrenzte Theil der Ebene liegt innerhalb; der andere unbegrenzte ausserhalb der Kreislinie.

Zuf. 1. Demnach ist die Kreislinie die gemeinschaftliche Grenze dieser beyden Theile der Ebene.

Zuf. 2. Jeder Punkt liegt innerhalb oder ausserhalb einer Kreislinie oder in ihr selbst, je nachdem sein Abstand von dem Mittelpunkte kleiner, oder grösser, oder eben so gross, als des Kreises Halbmesser, ist.

Zuf. 3. Wenn daher ein Punkt innerhalb, und ein anderer ausserhalb der Kreislinie liegt, so geht jede Linie, welche diese beyden Punkte verbindet, wenigstens durch einen Punkt der Kreislinie (§. 58. Z. 3.)

Zuf. 4. Eine gerade Linie, die innerhalb der Kreislinie liegt, geht, wenn sie auf beyden Seiten verlängert wird, wenigstens durch zwey Punkte der Kreislinie (§. 58. Z. 4.).

Z u f. 5. Aus gleichen Gründen müssen auch zwey Kreislinien, deren eine durch einen Punkt innerhalb, und durch einen Punkt ausserhalb der andern geht, einander in zwey Punkten schneiden; weil alsdann sowohl der über dem Durchmesser, als der unter dem Durchmesser liegende Theil der einen mit der andern einen Punkt gemein hat (Z. 3.)

Z u f. 6. Jeder Halbmeser hat mit der Kreislinie nur einen, und folglich jeder Durchmesser nur zwey Punkte gemein (Z. 2.).

F o r d e r u n g 5.

§. 61. Aus jedem Mittelpunkte mit jedem Halbmeser einen Kreis zu beschreiben.

A n m e r k u n g 1.

Auch die Vorstellung und Beschreibung des Kreises muß der Geometer, als ein Stück der ursprünglichen Raumsbeschreibung, von seinem Schüler schlechthin fordern.

Um die allgemeine Möglichkeit und die Art dieser Beschreibung einzusehen, braucht man sich nur vorzustellen, eine gegebene gerade Linie drehete sich um einen ihrer Endpunkte, welcher unverrückt bliebe, so lange, bis sie in ihre anfängliche Lage wie-

der zurückkäme, so beschriebe der fortrückende Endpunkt eine Kreislinie, welche die gegebene gerade Linie zum Halbmesser, und deren unverrückten Endpunkt zum Mittelpunkt hätte. Und eben auf diese Vorstellung gründet sich die empirische Darstellung oder Zeichnung der Kreislinie vermittelst des Zirkelinstruments.

A n m e r k u n g 2.

Das Wort: Kreis wird, so lange davon kein Misverstand zu besorgen ist, zu Bezeichnung sowohl der Kreislinie, als der Kreisfigur oder Kreisfläche, gebraucht.

L e h r s a z 1.

§. 62. Wenn bey zwey Kreislinien die Summe ihrer Halbmesser grösser, und zugleich der Unterschied derselben kleiner ist, als der Abstand ihrer Mittelpunkte, so schneiden sie einander in zwey Punkten, wovon der eine über, der andere unter der geraden Linie durch die Mittelpunkte liegt.

Hypothesis.	Fig.	Satz.
1) $AB \perp CD \triangleright AC$	2.	O um A u. O um C
2) $AB \text{ — } CD \triangleleft AC$		schneiden sich in E und F.

B e w e i s.

1) Da (p. hyp.) $AB \perp CD \triangleright AC$, so ist $AB \triangleright AC \text{ — } CD$ d. h. $\triangleright AD$ (§. 32.); folglich ist D ein Punkt innerhalb der Kreislinie F E G (§. 60. Z. 2.).

2) Da (p. hyp.) $AB \text{ — } CD \triangleleft AC$, oder (weil $CD = CH$, (§. 59. Z. 1.) $AB \text{ — } CH \triangleleft AC$, so ist $AB \triangleleft AC \perp CH$, d. i. $\triangleleft AH$ (§. 31.); folglich ist H ein Punkt ausserhalb der Kreislinie F E G (§. 60. Z. 2.)

3) Aber die Punkte D, H sind die Endpunkte des Durchmessers D H der Kreislinie H D E; folglich geht die Kreislinie H D E durch einen Punkt D innerhalb und durch einen Punkt H ausserhalb der Kreislinie F E G (1. 2.).

4) Daher muss die Kreislinie H D E die F E G in den Punkten E, F schneiden, wovon der eine über, der andere unter der geraden Linie A C durch die Mittelpunkte liegt (§. 60. Z. 5.).

Zuf. 1. Wenn zwey Kreislinien mit einerley Halbmeser beschrieben werden, so müssen sie einander schneiden, so bald ihr Halbmeser grösser, als der halbe Abstand ihrer Mittelpunkte ist, weil alsdann die Bedingungen des Lehrsazes Statt finden.

Zuf. 2. Aus dem nämlichen Grunde muß jede Kreislinie, deren Mittelpunkt in einer andern Kreislinie liegt, die letztere schneiden.

E r k l ä r u n g 34.

§. 63. Eine ebene geradlinige Figur von drey Seiten heißt ein Dreyeck (*triangulum* s. *trigonum*).

Ein Dreyeck ist gleichseitig (*äquilaterum*), wenn es lauter gleiche Seiten; gleichschenkelig (*aequicrurum* s. *isosceles*), wenn es nur zwey gleiche Seiten hat, die man auch seine Schenkel (*crura*) nennt; ungleichseitig (*scalenum*) aber, wenn keine Seite der andern gleich ist. Betrachtet man, nach Willkühr, eine Seite des Dreyecks als seine Grundlinie (*basis*), so heißt die gegenüberliegende Ecke seine Spitze (*apex*).

Z u s. 1. Die Möglichkeit der drey verschiedenen Arten des Dreyecks gründet sich unmittelbar auf die im Lehrsatz 1. (§. 62.) aufgestellten Bedingungen des Schneidens zweyer Kreise. So oft nämlich zwey Kreise, wie F E G, H D E (F. 2.) einander in einem Punkte E schneiden, entsteht, wenn man die Halbmesser A E, C E zieht, zwischen den beyden Mittelpunkten A, C und dem Durchschnittspunkte E ein Dreyeck A E C, welches, wie dieses, ungleichseitig ist, wenn die Halbmesser beyder Kreise weder einander selbst, noch dem Abstände der Mittelpunkte A C, gleich sind; gleichseitig wie A C B (F. 3.), wenn die Halbmesser dem Abstände der Mittelpunkte A B. gleich sind; und gleichschenkelig, wenn die Halbmesser zwar einander gleich, aber dem Abstände der Mittelpunkte ungleich sind.

Z u s. 2. Das gleichseitige Dreyeck ist immer auch ein gleichschenkeliges, welche seiner Seiten man auch als die Grundlinie ansehen mag.

A n m e r k u n g.

Das Gesez, welchem drey gerade Linien, aus denen ein Dreyeck zusammengesetzt werden soll, in Ansehung ihrer Länge, unterworfen sind, um die Erfüllung der im Lehrsatz 1. (§. 62.) aufgestellten Bedingungen

möglich zu machen, kann erst späterhin in der Folge gefunden werden. Vor der Hand ist die Construction des gleichseitigen Dreyecks zureichend, die weiteren Untersuchungen über die geradlinigen Figuren einzuleiten. Die Regel, nach welcher diese bewerkstelliget wird, anzugeben, ist die Absicht des folgenden Sazes.

A u f g a b e 1.

§. 64. Auf einer gegebenen begrenzten geraden Linie ein gleichseitiges Dreyeck zu beschreiben.

Gegeben.	Fig.	Gesucht.
Die begrenzte gerade Linie A. B.	3.	Die Construction eines gleichseitigen Δ auf A. B.

A u f l ö s u n g.

1) Aus A, als Mittelpunkt, mit A B, als Halbmesser, beschreibe den Kreis B D E.

2) Aus B, als Mittelpunkt, mit B A, als Halbmesser, beschreibe den Kreis A F E.

3) Aus C, dem Durchschnittspunkte beyder Kreise, ziehe nach A, B die Linien C A, C B.

B e w e i s.

1) Beyde Kreise sind mit $A B$, dem Abstände ihrer Mittelpunkte, als Halbmesser, beschrieben, folglich muß ein Durchschnitt C entstehen (§. 62. Z. 1.).

2) Da $A B = A C$, als Halbmesser des Kreises $A F E$ (§. 59. Z. 1.), so ist auch $A C = B C$ (§. 25); und mithin $A B = A C = B C$; d. h. das Δ ist gleichseitig (§. 63.); auch ist es über $A B$ beschrieben.

A u f g a b e 2.

§. 65. Eine gerade Linie, deren Anfangspunkt und Lage gegeben ist, einer andern gegebenen gleich zu machen.

Gegeben.	Fig.	Gesucht.
Die begrenzte gerade Linie $A. B.$	4 a. b. c.	1) $A D = A B$ 2) $C H = A B$ 3) $C D = A B$

A u f l ö s u n g u n d B e w e i s.

I. Fall. Wenn beyde Linien, wie (F. 4. a.) $A B$, $A C$ einerley Anfangspunkt A haben, und ein Theil von der $A C$ der $A B$ gleich gemacht, oder, was eben so viel

heißt, von der A C ein der A B gleiches Stück abgeschnitten werden soll; so beschreibe mit A B, als Halbmesser, die Kreislinie D E B. Da nun $A C > A B$, folglich C ein Punkt ausserhalb (§. 60. Z. 2.) aber (p. constr.) A ein Punkt innerhalb der Kreislinie D C B ist; so muß diese Kreislinie die gerade Linie A C, welche jene beyden Punkte verbindet, in D schneiden (§. 60. Z. 3.), alsdann aber ist $A D = A B$ (§. 59. Z. 1.).

II. Fall. Wenn der Anfangspunkt der einen Linie ausserhalb der andern liegt, wie (F. 4. b.) bey den Linien A B, C D der Fall ist, und ein Theil von der C D der A B gleich gemacht werden soll; so ziehe

1) die Verbindungslinie C A;

2) Auf C A beschreibe das gleichseitige Dreyeck A E C (§. 64.) und verlängere dessen Seiten E A, E C ins Unbestimmte, so haben diese Verlängerungen mit den Linien A B, C D die Anfangspunkte A, C gemein und sind ihrer Lage nach, gegeben.

3) Nun mache nach dem ersten Falle $A F = A B$, $E G = E F$, und $C H = C G$, so ist $C H = A B$.

Denn da $E C = E A$, und $E G = E F$ (p. constr.), so ist auch $C G = A F$ (§. 29.) $= A B$ (p. constr.). Nun ist $C H = C G$ (p. constr.); folglich auch $C H = A B$ (§. 25.).

III. Fall. Wenn der Anfangspunkt der einen Linie in der andern, oder in ihrer Verlängerung liegt, wie (F. 4. c.) bey den Linien $A B$, $C D$ zeigt, wovon die letzte der ersten gleich gemacht werden soll; so mache

1) nach dem ersten Falle, in willkürlicher Lage, die $A F = A B$.

2) nach dem zweyten Falle die $C D = A F$, so ist auch $C D = A B$ (§. 25.)

L e h r s a z. 2.

§. 66. Wenn in zwey Dreyecken zwey Seiten sammt dem eingeschlossenen Winkel einander stückweise gleich sind, so sind die Dreyecke congruent, folglich auch alle übrigen Bestimmungsstücke beyder einander gleich.

Hypothr.	Fig.	Satz.
1) $A B = D E$	5	1) $B C = E F$
2) $A C = D F$		2) $\triangle A B C \stackrel{S}{=} \triangle D E F$
3) $B A C = E D F$		3) $A C B = D F E$ u. $A B C = D E F$

Vorbereitung.

Bringe, in der Einbildung, das Dreyeck $A B C$ auf das Dreyeck $D E F$ so, daß der Punkt A auf den Punkt D , und die Seite $A B$ auf die $D E$ zu liegen komme.

B e w e i s.

1) Da (p. hyp. A) $A B = D E$, so muß, wenn A auf D , u. $A B$ auf $D E$ liegt, der Punkt B auf den Punkt E fallen (§. 41. Z. 4.), folglich die $A B$ die $D E$ decken.

2) Da (p. hyp. 3.) $B A C = E D F$, so muß, während die $A B$ die $D E$ deckt, auch die $A C$ auf die $D F$ fallen (§. 56. Z. 4.)

3) Da (p. hyp. 2.) $A C = D F$, so muß auch der Punkt C auf den Punkt F fallen (§. 41. Z. 4.) und mithin auch die $B C$ die $E F$ decken, weil sonst zwey gerade Linien einen

Raum einschliesen würden , gegen (§. 45. Z. 2.) , mithin auch ihr gleich seyn (§. 40.).

4) Da nun, nach 1) die AB die DE , nach 2) und 3) aber die AC die DF , und die BC die EF deckt , so deckt das ganze Dreyeck ABC das ganze Dreyeck DEF , und ist ihm gleich (§. 40.).

5) Folglich müssen auch die übrigen Winkel beyder einander decken und stückweise gleich seyn, nämlich $ACB = DFE$ und $ABC = DEF$.

Zus. 1. In congruenten Dreyecken liegen gleiche Seiten gleichen Winkeln , und gleiche Winkel gleichen Seiten gegenüber.

A n m e r k u n g.

Wenn daher in zwey Dreyecken die Gleichheit von drey Bestimmungsstücken angenommen oder bewiesen ist, und daraus, nach dem vorigen Lehrsatz, oder nach einem der nachfolgenden, Gleichheit der übrigen vermöge der Congruenz, gefolgert werden kann, so dient der vorige Zusatz als Regel, um diese gleichen Stücke zusammen zu finden.

Zus. 2. Durch zwey Seiten und den eingeschlossenen Winkel ist ein Dreyeck gegeben; d. h. es läßt sich daraus nicht mehr, als ein Dreyeck, obschon in sehr vielen verschiedenen Lagen, verzeichnen.

Lehrsatz 3.

§. 67. In gleichschenkeligen Dreyecken sind die Winkel an der Grundlinie, und wenn man die gleichen Schenkel verlängert, auch die Winkel unter der Grundlinie, einander gleich.

Hypoth.	Fig.	Satz.
1) $AB = AC$	6	1) $ABC = ACB$.
2) AB und AC sind ins Unbestimmte verlängert.		2) $CBD = BCE$.

Vorbereitung.

- 1) Auf der verlängerten AB nimm, nach Willkühr, einen Punkt D an.
- 2) Mache $AE = AD$ (§. 65.)
- 3) Ziehe die Verbindungslinien BE, CD .

Beweis.

- 1) Da $AB = AC$ (p. hyp.), $AE = AD$ (p. constr.) und $BAE = CAD$, so ist Δ

$A B E \cong \triangle A C D$ (§. 66); folglich $B E = C D$, $A B E = A C D$, $A E B = A D C$.

2) Da $A D = A E$ (p. constr.) aber auch $A B = A C$ (p. hyp.) folglich auch $B D = C E$ (§. 29); da ferner $C D = B E$ und $B D C = B E C$ (p. dem. 1.), so ist $\triangle B D C \cong \triangle C B E$ (§. 66.); folglich auch $C B D = B C E$, d. i. der zweyte Theil des Sazes; und $B C D = C B E$.

3) Da (p. dem. 1.) $A B E = A C D$, und (p. dem. 2.) $C B E = B C D$; so ist auch $A B C = A C B$ (§. 29.), und dies ist der erste Theil des Sazes.

Zus. Ein gleichseitiges Dreyeck ist daher auch gleichwinkelig und mithin eine regelmässige Figur (§. 58.)

L e h r s a z 4.

§. 68. Wenn in einem Dreyecke zwey Winkel einander gleich sind, so sind auch die Seiten, die den gleichen Winkeln gegenüber liegen, einander gleich.

Hypoth.	Fig.	Saz.
$A B C = A C B$.	7. a.	$A B = A C$.

B e w e i s.

Wären die Seiten $A B$, $A C$ ungleich, so müßte eine von beyden grösser, als die an-

dere, seyn. Es sey also $A B > A C$, mache $B D = A C$ (§. 65.) und ziehe die $D C$.

Da nun $B D = A C$ (p. Constr.), $B C = B C$ und $A B C = A C B$ (p. hyp.), so ist $\triangle D B C \cong \triangle A B C$ (§. 66.) d. h. das kleinere dem grösseren gleich, welches ungeeignet ist. Es ist also die $A B$ der $A C$ nicht ungleich; folglich $A B = A C$.

Zus. Ein Dreyeck, das lauter gleiche Winkel hat, ist auch gleichseitig.

Lehrsatz 5.

§. 69. Wenn in zwey Dreyecken alle drey Seiten einander stückweise gleich sind, so sind die Dreyecke congruent.

Hypoth.	Fig.	Satz.
1) $A B = D E$	7.	
2) $A C = D F$	a. b. c. d.	$\triangle A B C \cong \triangle D E F$
3) $B C = E F$		

Vorbereitung.

Bringe das Dreyeck $A B C$ über das Dreyeck $D E F$, so, daß B auf E , und $B C$ längs der $E F$ zu liegen komme.

B e w e i s .

1) Da (p. hyp.) $BC = EF$, so muß, während B auf E und B C auf E F liegt, C auf F fallen (§. 41. Z. 4.), also die B C die E F decken.

2) Fiele nun, während B auf E, und C auf F liegt, nicht auch der Punkt A auf den Punkt D, so müßte er entweder auf einen der Schenkel DE, DF, oder zwischen diese, oder endlich jenseits derselben fallen.

I. Fall. Fiele der Punkt A auf den Schenkel DE (P. 7. b.), so wäre $AB < DE$; fiel A auf den Schenkel DF, so wäre $AC < DF$. Beides aber widerspricht der Voraussetzung, nach welcher $AB = DE$, und $AC = DF$, und ist folglich unmöglich.

II. Fall. Fiele der Punkt A zwischen die Schenkel DE, DF, wie (P. 7. c.); so ziehe die Verbindungslinie AD und verlängere CA nach G, FD nach H.

Da nun (p. hyp.) $AC = DF$, so ist $GA = DH$, (§. 67.); es ist aber $EAD > GAD$ (§. 24.), folglich auch $EAD > ADH$ (§. 54.). Nun ist aber $ADH > EDA$ (§. 24.); folglich noch viel

mehr $E A D \triangleright E D A$ (§. 36.). Da aber (p. hyp.) $A B = D E$, so ist auch $E A D = E D A$ (§. 67.); welches unmöglich ist.

III. Fall. Fiele der Punkt A, jenseits der Schenkel $D E$, $D F$, wie (Fig. 7. d.), so ziehe die Verbindungslinie $A D$.

Da nun (p. hyp.) $A C = D F$, so ist $A D F = D A F$, auch $D A F \triangleright A D E$ (§. 34.). Nun ist wiederum $D A E \triangleright D A F$; also noch vielmehr $D A E \triangleright A D E$ (§. 36.). Allein, da (p. hyp.) $A B = D E$; so ist auch $D A E = A D E$ (§. 67.), welches unmöglich ist.

3) Da nun der Punkt A weder auf einen der Schenkel $D E$, $D F$, noch zwischen diese, noch auch jenseits derselben fallen kann; so bleibt für ihn keine andere Lage übrig, als die, worin er auf den Punkt D selbst fällt; er muß also diese Lage haben.

4) Ist aber dies, so deckt alsdann auch die Seite $A B$ die $D E$, $A C$ die $D F$, und das ganze Dreyeck $A B C$ das ganze Drey-

eck D E F (§. 20.). Folglich sind beyde Dreyecke, und mithin auch die sämtlichen Winkel beyder, einander gleich (§. 40.); d. h. $A B C = D E F$, $A C B = D F E$, und $B A C = E D F$.

Zus. 1. Wenn zwey Dreyecke gleiche Seiten haben, so haben sie auch gleiche Winkel (vergl. §. 66. Z. 1.)

Zus. 2. Durch drey Seiten ist ein Dreyeck gegeben.

A u f g a b e 3.

§. 70. Einen gegebenen geradlinigen Winkel zu halbiren,

Gegeben.	Fig.	Gesucht.
Winkel B A C.	8	$B A F = C A F$.

A u f l ö s u n g.

1) Auf dem Schenkel A B nimm, nach Willkühr, einen Punkt D an.

2) Von dem Schenkel A C schneide $A E = A D$ ab (§. 65.)

3) Ziehe D E, und beschreibe auf derselben das gleichseitige Dreyeck D F E (§. 64.)

4) Ziehe A F, so ist $D A F = E A F$.

B e w e i s.

Da (p. constr.) $AD = AE$, $DF = EF$, auch $AF = AF$, so ist (§. 69.) $DAF = EAF$.

A u f g a b e 4.

§. 71. Eine gegebene begrenzte gerade Linie zu halbiren.

Gegeben.	Fig.	Gesucht.
Die begrenzte gerade Linie AB .	9	$AD = DB$.

A u f l ö s u n g.

1) Auf der gegebenen geraden Linie AB beschreibe das gleichseitige Dreyeck CAB (§. 64.)

2) Halbire den Winkel ACB (§. 70.), so ist $AD = DB$.

B e w e i s.

Da (p. constr.) $AC = BC$, $ACD = BCD$, auch $CD = CD$, so ist $AD = DB$ (§. 66.)

A u f g a b e 5.

§. 72. Auf einer gegebenen geraden Linie, in einem auf ihr gegebenen Punkte, ein Loth aufzurichten.

Gegeben.	Fig.	Gesucht.
Die gerade Linie A B, und in ihr der Punkt C.	10	C F in C lothrecht auf A B.

A u f l ö s u n g.

1) Auf A C nimm, nach Willkühr, den Punkt D an.

2) Mache $C E = C D$ (§. 65.)

3) Auf D E beschreibe das gleichseitige Dreyeck D F E (§. 64.)

4) Ziehe die C F, so ist C F das verlangte Loth.

B e w e i s.

Da (p. constr.) $D F = E F$, $C D = C E$, auch $C F = C F$, so ist $D C F = E C F$ (§. 69.) = R. (§. 57.); folglich C F in C lothrecht auf A B.

A u f g a b e 6.

§. 73. Auf eine gegebene unbegrenzte gerade Linie von einem ausser ihr gegebenen Punkte ein Loth zu fallen.

Gegeben,	Fig.	Gesucht.
Die unbegrenzte gerade Linie A B, und der Punkt C ausser ihr,	11.	C G von C aus lothrecht auf A B.

A u f l ö s u n g.

1) Auf der andern Seite der Linie A B nimm, nach Willkühr, einen Punkt D an.

2) Aus C beschreibe mit C D die Kreislinie E D F, welche die gerade Linie A B in E und F schneiden wird (§. 60. Z. 2. 4.)

3) Halbire die Linie E F in dem Punkte G (§. 71.).

4) Ziehe die Linien C E, C F, C G; so ist C G das verlangte Loth.

B e w e i s.

Da (p. constr.) $E G = G F$, auch $C G = C G$, und $C E = C F$ (§. 59. Z. 1.); so ist $C G E = C G F$ (§. 69.) = R. (§. 57.), und mithin C G von C aus auf A B lothrecht.

L e h r s a z 6.

§. 74. Alle rechte Winkel sind unter einander gleich.

Hypoth.

Fig.

Saz.

 $A B C = R$

12.

 $A B C = D E F$ $D E F = R$

V o r b e r e i t u n g.

1) Mache $E F = B C$. (§. 65.).

2) Verlängere $B C$ nach G , $E F$ nach H . (§. 43.)

3) Bringe $D E F$ über $A B C$ so, daß F auf C und $F H$ längs der $C G$ zu liegen komme.

B e w e i s.

1) Da (p. constr.) $E F = B C$, so wird, während F auf C und $F H$ längs der $C G$ liegt, E auf B fallen (§. 41. Z. 4.), also die Linie $E F$ die $B C$ decken.

2) Bey dieser Lage der Linien $E F$, $B C$ wird der Schenkel $D E$ entweder auch auf den $A B$ fallen, oder nicht. Wäre das letztere, so müßte der Schenkel $D E$, der (p. dem. 1.) den Punkt B mit dem Schenkel $A B$ gemein hat, mit diesem einen Winkel bilden (§. 56.). Nun ist $A B C = A B G$ (§. 57.) und $A B C > D B C$; folglich auch $A B G > D B C$. Da nun (p. hyp. und §. 57.)

$$\begin{pmatrix} D & B & C \\ D & E & F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & B & G \\ D & E & G \end{pmatrix} \text{ so ist auch } A$$

$B G > D B G$ (§. 34.), wider (§. 24.), welches unmöglich ist. Man muß also das erstere annehmen, daß nämlich der Schenkel

D E auch auf den A B zu liegen komme. Alsdann aber deckt der Winkel D E F den A B C, und ist ihm folglich gleich. (§. 56. Z. 4.)

Zus. In einem Punkte einer geraden Linie kann nicht mehr als ein Loth auf ihr aufgerichtet werden. Denn, wenn in dem Punkte B der geraden Linie C G zwey verschiedene Lothe A B, D B aufgestellt wären, so wäre (Lehrs. 6.) $A B C = D B C$ wider (§. 24.), welches unmöglich ist.

A n m e r k u n g.

Da alle rechte Winkel unter einander gleich sind, so kann die Quantität aller übrigen Winkel am bequemsten auf die des rechten bezogen, und alle anderen können in Theilen des letzteren ausgedruckt werden.

L e h r s a z 7.

§. 75. Wenn eine gerade Linie mit einer andern zusammentrifft, so macht sie mit dieser zwey Nebenwinkel, die zusammen zwey rechten Winkeln gleich sind.

Hypoth.	Fig.	Saz.
Die gerade Linie D B trifft mit der C G in dem Punkte B zusammen.	12.	$D B C + D B G = 2 R.$

B e w e i s.

1) Sind die beyden Nebenwinkel gleich, so ist der Satz für sich selbst klar (§. 57.)

2) Sind sie aber ungleich, wie $\angle DBC$, $\angle DBG$, so sey AB in B auf CG lothrecht, alsdann ist $\angle ABC + \angle ABG = 2R$ (§. 57. und 74).

3) Da nun $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$, und
 $\angle ABG = \angle ABG$, so ist auch
 $\angle ABC + \angle ABG = \angle ABD + \angle DBC + \angle ABG$ (§. 28.)

4) Da ferner $\angle GBD = \angle ABG + \angle ABD$, und
 $\angle DBC = \angle DBC$, so ist auch
 $\angle DBC + \angle GBD = \angle ABG + \angle ABD + \angle DBC$ (§. 28.)

5) Aber (p. dem.) ist
 $\angle ABC + \angle ABG = \angle ABG + \angle ABD + \angle DBC$,
 folglich $\angle DBC + \angle DBG = \angle ABC + \angle ABG$.

6) Aber (p. dem. 2.) ist
 $\angle ABC + \angle ABG = 2R$; folglich auch
 $\angle DBC + \angle DBG = 2R$ (§. 25.)

Zus. 1. Ist einer von zwey Nebenwinkel'n ein rechter, so ist es auch der andere. Ein stumpfer Winkel hingegen hat einen spizen, und

ein spizer einen stumpfen Nebenwinkel, wo alsdann jeder die Ergänzung (*complementum*) des andern zu zwey rechten heisst.

Zus. 2. Wenn die Linie AB (F. 12.) auf der CG lothrecht ist, so ist auch umgekehrt die CG auf der AB lothrecht.

Zus. 3. Wenn von demselben Punkte einer geraden Linie mehrere gerade Linien — so viel ihrer seyn mögen — nach verschiedenen Richtungen ausgehen, so betragen alle Winkel, welche sie mit der ersten, an einerley Seite derselben, einschliesen, zusammen zwey rechte.

Zus. 4. Zwey gerade Linien haben keinen gemeinschaftlichen Abschnitt. Denn gesetzt, die beyden geraden Linien CBG , CBK (F. 12.) hätten den Abschnitt CB gemein, so, dass sie erst von dem Punkte B an in die zwey Aeste BK , BG sich theilten, so sey AB in dem Endpunkte B , des gemeinschaftlichen Abschnitts CB auf beyden lothrecht (§. 72.); so wäre $ABC = ABG = R$, aber auch $ABC = ABK = R$ (§. 57.); folglich auch $ABG = ABK$, wider (§. 24.), welches unmöglich ist.

L e h r s a z 8.

§. 76. Wenn zwey nach entgegengesetzten Seiten zu liegende gerade Linien mit einer dritten Nebenwinkel machen, die zwey

rechten gleich sind; so liegen die beyden ersten in einer geraden Linie

Hypoth.	Fig.	Saz.
$A B C + A B G = 2 R.$	12.	$B C$ und $B G$ machen eine gerade Linie aus.

B e w e i s.

Wäre nicht die $B G$ die geradlinige Verlängerung von der $B C$, so sey es die $B K$, alsdann ist $A B C + A B K = 2 R.$ (§. 75.). Aber (p. hyp.) ist auch $A B C + A B G = 2 R$; folglich wäre $A B C + A B G = A B C + A B K$ (§. 25.), und mithin $A B G = A B K$ (§. 29.) wider (§. 24.), welches unmöglich ist.

L e h r s a z 9.

§. 77. Wenn zwey gerade Linien einander schneiden, so machen sie die Scheitelwinkel einander gleich.

Hypoth.	Fig.	Saz.
Die geraden Linien $A B, C D$ schneiden einander in E .	13.	1) $A E D = B E C$. 2) $A E C = B E D$.

B e w e i s.

1) Da die gerade Linie D E mit der A B in E zusammentrifft, so ist $D E A + D E B = 2 R$ (§. 75).

2) Da die gerade Linie B E mit der C D in E zusammentrifft, so ist $D E B + B E C = 2 R$; folglich $D E A + D E B = D E B + B E C$ (§. 25.), und mithin $A E D = B E C$ (§. 29.).

3) Da die gerade Linie C E mit der A B in E zusammentrifft, so ist $A E C + C E B = 2 R$ (§. 75).

4) Da die gerade Linie B E mit der C D in E zusammentrifft, so ist $C E B + B E D = 2 R$; folglich $A E C + C E B = C E B + B E D$ (§. 25.), und mithin $A E C = B E D$ (§. 29.).

Zus. 1. Die vier Winkel, welche zwey einander schneidende gerade Linien an ihrem Durchschnittpunkte machen, sind zusammen vier rechten Winkeln gleich.

Zus. 2. Eben das gilt von den sämtlichen Winkeln, welche mehr, als zwey, gerade Linien, die einander in einem Punkte schneiden, an diesem Punkte machen.

Zus. 3. Ueberhaupt also betragen alle Winkel, die um einen Punkt herum in einer Ebene möglich sind, zusammen vier rechte.

Zus. 4. Läßt man also auch erhabene Winkel (§. 57. A. 2.) zu, so machen schon zwey gerade Linien, die von einem Punkte in einer Ebene ausgehen, an diesem Punkte vier rechte Winkel.

Zus. 5. Wenn zwey nach entgegengesetzten Seiten zu liegende gerade Linien (E C, E D, F. 13.) mit einer dritten (A B) gleiche Scheitelwinkel (A E D, B E C) machen, so liegen die beyden ersten in einer geraden Linie.

Denn wenn $A E D = B E C$, so ist auch $A E D + B E D = B E D + B E C$ (§. 28.). Aber $A E D + B E D = 2 R$ (§. 75.); folglich auch $B E D + B E C = 2 R$ (§. 25.); und mithin D E mit E C in einer geraden Linie (§. 76.).

Zus. 6. Wenn vier von einem Punkte (E, F. 13.) ausgehende gerade Linien (A E, E B, C E, E D) die am Scheitelpunkte entgegengesetzten Winkel (A E D, B E C und A E C, B E D) einander gleich machen, so liegen sie paarweise (A E mit E B und C E mit E D) in einer geraden Linie.

Denn da (p. hyp.) $A E D = B E C$ und $A E C = B E D$, so ist $A E D + A E C = B E$

$D + B E C$. Da nun $A E C + A E D + B E D + B E C = 4 R$ (Zus. 3), so ist sowohl $A E D + A E C$ als $B E D + B E C = 2 R$ (§. 27.), folglich $A E$ mit $E B$ und $C E$ mit $E D$ in einer geraden Linie. (§. 76. und Z. 5.)

L e h r s a z 10.

§. 78. An jedem Dreyecke ist, wenn man eine seiner Seiten verlängert, der äussere Winkel grösser, als jeder seiner inneren Gegenwinkel.

Hypoth.

Fig.
14.

Saz.

$C D$ ist die Verlängerung der Seite $B C$ des $\triangle A B C$.

$$A C D > \begin{pmatrix} B A C \\ A B C \end{pmatrix}$$

V o r b e r e i t u n g.

- 1) Halbire die Seite $A C$ in E (§. 71.).
- 2) Ziehe $B E$ und verlängere sie bis $E F = B E$.
- 3) Ziehe $C F$.
- 4) Verlängere $A C$ nach G .

B e w e i s.

- 1) Da (p. constr.) $A E = E C$, $B E = E F$, mithin auch $A E B = C E F$ (§. 77.),

so ist $\triangle A B E \stackrel{\circ}{=} \triangle F C E$ (§. 66.), folglich auch $B A E = E C F$, oder, was eben das ist, $B A C = A C F$.

2) Nun ist $A C D \triangleright A C F$ (§. 24.); folglich auch $A C D \triangleright B A C$.

3) Wenn man nun an der Seite $B C$ die nämliche Construction vornimmt, so kann auf eben die Art gezeigt werden, daß $B C G \triangleright A B C$.

4) Da aber $B C G = A C D$ (§. 77.); so ist auch $A C D \triangleright A B C$.

L e h r s a z 11.

§. 79. Wenn in zwey Dreyecken zwey Winkel nebst der anliegenden, oder auch einer gegenüberliegenden Seite stückweise gleich sind, so sind die Dreyecke congruent.

I. F a l l.

Hypoth.	Fig.	Satz.
1) $A B C = D E F$	15.	1) $A B = D E$
2) $A C B = D F E$		2) $\triangle A B C \stackrel{\circ}{=} \triangle D E F$.
3) $B C = E F$		

B e w e i s.

1) Wäre nicht $A B = D E$, so sey $A B \triangleright D E$.

Mache also $B G = D E$ und ziehe $C G$.

2) Da nun (p. constr.) $B G = D E$, aber (p. hyp.) $B C = E F$, und $A B C = D E F$; so ist $\triangle G B C \stackrel{\circ}{=} \triangle D E F$ (§. 66.), und mithin $G C B = D F E$.

3) Aber (p. hyp.) ist $D F E = A C B$, folglich wäre $G C B = A C B$ (§. 25.) wider (§. 24.), welches unmöglich ist.

4) Die Seite $A B$ kann also der $D E$ nicht ungleich, folglich muß sie ihr gleich seyn.

5) Ist aber $A B = D E$, so ist, da (p. hyp.) auch $B C = E F$, und $A B C = D E F$ ist, $\triangle A B C \stackrel{\circ}{=} \triangle D E F$ (§. 66.).

II. F a l l.

Hypoth.	Fig.	Satz.
1) $A B C = D E F$	15.	1) $B C = E F$
2) $A C B = D F E$		2) $\triangle A B C \stackrel{\circ}{=} \triangle D E F$
3) $A B = D E$		

B e w e i s.

1) Wäre nicht $B C = E F$, so sey $B C > E F$. Mache also $B H = E F$ (§. 65.) und ziehe $A H$.

2) Da nun (p. constr.) $BH = EF$, aber (p. hyp.) $AB = DE$ und $ABC = DEF$, so ist $\triangle ABH \cong \triangle DEF$ (§. 66.), und mithin $AHB = DFE$.

3) Aber (p. hyp.) ist $DFE = ACB$, folglich wäre $AHB = ACB$ (§. 25.) wider (§. 78.), welches unmöglich ist.

4) Die Seite BC kann also der EF nicht ungleich, folglich muß sie ihr gleich seyn.

5) Ist aber $BC = EF$, so ist, da (p. hyp.) auch $AB = DE$ und $ABC = DEF$, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (§. 66.).

Zus. 1. Durch zwey Winkel und eine Seite ist ein Dreyeck gegeben.

Zus. 2. Zwey rechtwinkelige Dreyecke sind congruent, wenn in beyden ein spizer Winkel und eine Seite stückweise gleich sind.

A n m e r k u n g.

Das Gesez, welchem diese Winkel in Ansehung ihrer Quantität unterworfen sind, giebt der folgende Lehrsatz an.

L e h r s a z 12.

§. 80. An jedem Dreyecke sind jede zwey Winkel zusammen kleiner, als zwey rechte.

Hypoth.	Fig.	Satz
$A B C$ ist ein Δ	16.	$A B C + A C B$ $\leq 2 R.$

V o r b e r e i t u n g.

Verlängere die Seite $B C$ des $\Delta A B C$ nach D .

B e w e i s.

Da $A C D \supset A B C$ (§. 78.), und
 $+ A C B = + A C B$, so ist auch
 $A C D + A C B \supset A B C + A C B$ (§. 31.).
 Aber $A C D + A C B = 2 R.$ (§. 75.); folglich
 $2 R \supset A B C + A C B$ (§. 35.), oder
 $A B C + A C B \leq 2 R.$

Eben so kann aber gezeigt werden, daß
 $A B C + B A C \leq 2 R$, wie auch daß
 $B A C + A C B \leq 2 R$ sey; folglich ist
 der Satz bewiesen.

Zus. 1. Wenn zwey zusammenstossende gerade Linien ($A B$, $A C$, F. 16.) von einer dritten ($B D$) geschnitten werden, so machen sie mit dieser die innern Winkel ($A B C$ und $A C B$) zusammen $\leq 2 R.$

Zus. 2. Macht eine Linie ($A C$, F. 16.) mit einer andern ($B D$) ungleiche Nebenwinkel,

so fällt ein Loth von jedem Punkte der ersten Linie nach der zweyten auf die Seite des spizen Winkels.

Zus. 3. Nach einer geraden Linie kann von einem Punkte ausser ihr, nicht mehr als ein einziges Loth gehen. Denn zwey Lothe würden mit ihr ein Dreyeck bilden, in welchem zwey innere Winkel $= 2 R$ wären.

Zus. 4. Hat ein Dreyeck einen rechten oder einen stumpfen Winkel, so sind die beyden übrigen nothwendig spiz.

Zus. 5. In einem gleichschenkeligen Dreyecke sind die Winkel an der Grundlinie, und in einem gleichseitigen, alle drey Winkel spiz.

Zus. 6. Von jedem gleichschenkeligen Dreyecke (C E F, F. 11.) gelten folgende Sätze.

I. Die Linie (C G) von der Spitze nach der Mitte der Grundlinie ist auf dieser lothrecht und halbirt den Winkel an der Spitze und das ganze Dreyeck (§. 69.).

II. Die Linie (C G), durch welche der Winkel an der Spitze halbirt wird, halbirt auch die Grundlinie und das ganze Dreyeck, und ist auf der Grundlinie lothrecht (§. 66.).

III. Das Loth (C G) von der Spitze nach der Grundlinie halbirt die letztere, so wie den Winkel an der Spitze und das ganze Dreyeck (§. 79.).

IV. Ein auf der Grundlinie in ihrer Mitte (G) aufgestelltes Loth (G C) geht durch die Spitze. Denn da nach I) die Linie (G C) von der Spitze nach der Mitte der Grundlinie auf der letzteren lothrecht ist; so würden, wenn sich in der Mitte (G) der Grundlinie ein Loth (G K) errichten liesse, das nicht durch die Spitze ginge, in dem nämlichen Punkte (G) der geraden Linie (E F) zwey Lothe (G C, G K) aufgestellt seyn, wider (§. 74. Zus.), welches unmöglich ist.

V. Wenn in einem Dreyecke (C E F) eine gerade Linie (C G) von der Spitze nach der Grundlinie so geht, daß sie die letztere halbt und lothrecht schneidet; so ist das Dreyeck gleichschenkelig (§. 66.).

VI. Wenn in einem Dreyecke (C E F) die gerade Linie (C G), welche den Winkel an der Spitze halbt, auf der Grundlinie lothrecht ist; so ist das Dreyeck gleichschenkelig (§. 79.).

A n m e r k u n g 1.

Der obige Lehrsatz (12) bestimmt die Grenzen der Möglichkeit der Dreyecke in Ansehung der Winkel, und begründet dadurch die Eintheilung derselben in rechtwinkelige, stumpfwinkelige und spizwinkelige.

A n m e r k u n g. 2.

Dafs man in den Sätzen (I — IV.) des Zus. 6. auch Mittelpunkt und Sehne des Kreises an Statt: Spitze und Grundlinie des Dreyecks setzen könne, erhellet aus der Figur von selbst.

L e h r s a z 13.

§. 81. In jedem Dreyecke liegt der grösseren Seite auch der grössere Winkel, und dem grösseren Winkel die grössere Seite gegen über.

I. T h e i l.

Hypoth.	Fig.	Satz.
A B C ist ein Δ , worin $A B > A C$.	17.	$A C B > A B C$.

V o r b e r e i t u n g.

Mache $A D = A C$, und ziehe C D.

B e w e i s.

1) Da (p. constr.) $A D = A C$, so ist $A D C = A C D$ (§. 67.).

2) Nun ist $A C B > A C D$ (§. 24.); folglich auch $A C B > A D C$ (§. 34.).

3) Es ist aber wiederum $A D C \triangleright A B C$ (§. 78.); folglich noch vielmehr $A C B \triangleright A B C$ (§. 36.).

II. T h e i l.

Hypoth.	Fig.	Satz.
$A B C$ ist ein Δ , worin $A C B \triangleright A B C$.	17.	$A B \triangleright A C$.

B e w e i s.

Wäre nicht $A B \triangleright A C$, so wäre entweder $A B = A C$, oder $A B \triangleleft A C$ (§. 22.).

1) Wäre $A B = A C$, so wäre (§. 67.) $A C B = A B C$, gegen die Voraussetzung $A C B \triangleright A B C$, welches unmöglich ist.

2) Wäre $A B \triangleleft A C$, so wäre (n. d. I. Theil.) $A C B \triangleleft A B C$, eben so sehr gegen die Voraussetzung $A C B \triangleright A B C$, also eben so unmöglich.

Folglich muß $A B \triangleright A C$ seyn.

Z u s. Das ungleichseitige Dreyeck hat lauter ungleiche Winkel, und umgekehrt.

L e h r s a z 14.

§. 82. In jedem Dreyecke sind jede zwey Seiten zusammen größer als die dritte.

Hypoth.	Fig.	Satz
A B C ist ein Δ	18.	$AC + CB > AB$

Vorbereitung.

- 1) Verlängere A C nach D.
- 2) Mache $CD = CB$ (§. 65.), und ziehe B D.

Beweis.

- 1) Da (p. constr.) $CD = CB$; so ist $CDB = CBD$ (§. 67.).

- 2) Nun ist $ABD > CBD$ (§. 24.);

folglich auch $ABD > \begin{pmatrix} CDB \\ ADB \end{pmatrix}$ (§. 34.)

- 3) Da (p. dem. 2.) $ABD > ADB$, so ist $AD > AB$ (§. 81.).

- 4) Aber $AD = AC + CD = AC + CB$ (p. constr.); folglich $AC + CB > AB$.

- 5) Eben so kann der Satz von jedem andern Paare Seiten bewiesen werden, folglich gilt er ganz allgemein.

Zus. In jedem Dreyecke ist der Unterschied jeder zwey Seiten kleiner als die dritte.

Aus dem Bewiesenen: $AC + CB > AB$, folgt, wenn man auf beyden Seiten Gleiches

wegnimmt, unmittelbar $B C \supset A B - A C$ (§. 32.); und eben so bey den übrigen Seitenpaaren. Es läßt sich aber auch aus der Construction zeigen. Denn es sey (F. 17.) $A B \supset A C$, und $A D = A C$, so ist $A D C \triangleleft R$ (§. 80. Z. 5.), folglich $B D C \supset R$ (§. 75. Z. 1.), und mithin $B C \supset B D$, d. i. $A B - A C \triangleleft B C$ (§. 81.).

Anmerkung 1.

Dieser Satz bestimmt die Grenzen der Möglichkeit der Dreyecke in Ansehung der Seiten.

Denn wenn aus der Bedingung des Lehrsatzes, daß die Summe jeder zwey Seiten größer sey, als die dritte; vermöge des Zusatzes folgt, daß der Unterschied jeder zwey Seiten kleiner sey, als die dritte: so müssen, wenn drey gerade Linien die Eigenschaft haben, daß jede zwey derselben größer, als die dritte sind, zwey Kreise, die mit zweyen derselben, als Halbmessern, aus den Endpunkten der dritten, als Mittelpunkten, beschrieben werden, einander nothwendig schneiden (§. 62.), und folglich muß alsdann jedesmal ein Dreyeck Statt finden (§. 63. Z. 1.).

A n m e r k u n g 2.

Es hat Leute gegeben, die es den Geometern zum Vorwurfe machen wollten, daß sie sich die unnütze Mühe nähmen, so sonnenklare Sätze, wie Lehrsatz 14. und einige der folgenden sind, zu beweisen. Diesen muß man antworten, daß es durchaus Regel der Methode sey, die Zahl der Axiome, ohne Noth, nicht zu vermehren, sondern jeden Satz, der sich aus höheren Gründen ableiten läßt, aus denselben wirklich abzuleiten.

Die Wichtigkeit des obigen Satzes für das System zeigt indessen schon die vorige Anmerkung, und sie wird bald, durch andere merkwürdige Sätze, die daraus abzuleiten sind, noch einleuchtender werden.

L e h r s a t z 15.

§. 83. Wenn in den Endpunkten einer von den Seiten eines Dreyecks innerhalb desselben zwey gerade Linien aufgestellt werden; so sind diese zwar kleiner, als die zwey übrigen Seiten des Dreyecks, schließen aber einen größern Winkel ein.

Hypoth.

Fig.

Saz.

- 1) $A B C$ ist ein Δ 19. 1) $B D + D C$
 2) Aus D innerhalb des Δ , gehen $\angle A B + A C$.
 $D B, D C$ nach $B, A C$.
 C , den Endpunk-
 ten von $B C$.

Vorbereitung:

Verlängere $B D$ bis nach E .

Beweis.

I. Theil.

$$B A + A E > B E \quad (\S. 82.)$$

$$B E = B D + D E \quad (\S. 23.), \text{ folglich}$$

$$B A + A E > B D + D E \quad (\S. 31.)$$

$$+ E C = + E C$$

$$B A + A E + E C > B D + D E + E C$$

$$B A + A C \quad (\S. 31.)$$

Nun ist wiederum

$$D E + E C > D C \quad (\S. 82.) \text{ folglich}$$

noch vielmehr

$$B A + A C > B D + D C \quad (\S. 36.) \text{ oder}$$

$$B D + D C < B A + A C$$

II. T h e i l.

$B E C \triangleright B A E$ (§. 78.), und, aus eben dem Grunde, $B D C \triangleright B E C$, folglich noch vielmehr $B D C \triangleright B A E$ (§. 36.)

A n m e r k u n g.

Dafs von einem Punkte innerhalb eines Dreyecks nach zwey Punkten, deren einer zwar der Endpunkt, der andere aber ein anderer Punkt der Grundlinie ist, auf unendlich mannigfaltige Art gerade Linien gehen können, die zusammen eben so grofs oder grösser sind, als die beyden Seiten des Dreyecks, haben Proclus, Pappus und Clavius gezeigt.

A u f g a b e 7.

§. 84. Aus drey geraden Linien, welche drey andern gegebenen, von denen jede zwey zusammen grösser, als die dritte sind, stückweise gleich seyen, ein Dreyeck zu beschreiben.

Gegeben.

Fig.

Gesucht.

Drey gerade Linien

20 Die Construction ei-

A, B, C von der Beschaffenheit, dafs A

nes $\triangle F G K$, worin

$K F = A$, $F G =$

$+ B \triangleright C$, $A + C$

B , $G K = C$.

$\triangleright B$ u. $B + C \triangleright A$.

A u f l ö s u n g.

1) Ziehe eine bey E unbegrenzte gerade Linie D E.

2) Mache $D F = A$, $F G = B$, $G H = C$ (§. 65.).

3) Aus F, dem Endpunkte der ersten D F, beschreibe mit dieser ersten als Halbmesser, den Kreis D K L.

4) Aus G, dem Endpunkte der zweyten G F, beschreibe mit der dritten G H, als Halbmesser, den Kreis H K L.

5) An den einen Durchschnittspunkt K der beyden Kreise ziehe die F K, G K, so ist F G K das verlangte Dreyeck.

B e w e i s.

1) Da (p. constr.) $D F = A$, aber $F K = D F$ (§. 59. Z. 1.), so ist auch $F K = A$ (§. 25.).

2) Da (p. constr.) $G H = C$, aber $G K = G H$ (§. 59. Z. 1.), so ist auch $G K = C$ (§. 25.).

3) Ist auch (p. constr.) $G F = B$.

Folglich sind die drey Seiten des $\triangle F G K$ den drey gegebenen geraden Linien A, B, C stückweise gleich.

4) Da von den drey geraden Linien A, B, C jede zwey zusammen grösser, als die dritte sind, so haben auch die drey ihnen gleiche gerade Linien D F, F G, G H die nämliche Eigenschaft, und folglich müssen zwey Kreise, die mit zweyen derselben, als Halbmessern, aus den Endpunkten der dritten als Mittelpunkten, beschrieben werden, einander nothwendig schneiden (§. 62.).

A u f g a b e 8.

§. 85. An einen gegebenen Punkt einer gegebenen geraden Linie einen geradlinigen Winkel zu setzen, der einem gegebenen geradlinigen Winkel gleich sey.

Gegeben.

Fig.

Gesucht.

1) Die gerade Linie A B und in ihr der Punkt A.

21. An dem Punkte A der Linie A B ein geradliniger Winkel $F A G = D C E$.

2) Der geradlinige Winkel D C E.

A u f l ö s u n g.

1) Auf den Schenkeln C D, C E des gegebenen Winkels D C E nimm nach Willkühr, die Punkte D, E an, und ziehe D E.

2) Mache $A G = C E$ (§. 65.), und beschreibe über der $A G$, als Grundlinie, das $\triangle A F G$ so, daß $A F = C D$, $F G = D E$ sey (§. 84.), so ist $F A G = D C E$.

B e w e i s.

Da (p. constr.) $A G = C E$, $A F = C D$, $F G = D E$, so ist $F A G = D C E$ (§. 69.); auch liegt dieser Winkel an dem Punkte A der Linie $A B$.

A u f g a b e 9.

§. 86. Aus zwey gegebenen Seiten und einem Winkel, welchen diese Seiten einschliesen sollen, ein Dreyeck zu verzeichnen.

Gegeben	Fig.	Gesucht
1) Die geraden Linien A , B (F. 20.) als Seiten.	20. 21. 22.	Die Construction eines $\triangle F K H$, worin, $K F = A$, $F H = B$, $K F H = D C E$ (F. 22.)
2) $D C E$ (F. 21.) als Winkel der von diesen Seiten eingeschlossen werden soll.		

A u f l ö s u n g.

- 1) Ziehe die bey G unbegrenzte gerade Linie F G;
- 2) Mache $FH = B$. (§. 65.).
- 3) Seze an den Punkt F der Linie F H den Winkel $KFH = DCE$ (§. 85.).
- 4) Mache $FK = A$ (§. 65.).
- 5) Ziehe H K, so ist F H K das verlangte Dreyeck.

B e w e i s.

Da (p. constr.) $FK = A$, $FH = B$, $KFH = DCE$, und durch zwey Seiten und den eingeschlossenen Winkel ein Dreyeck gegeben ist (§. 66. Z. 2.), so ist F H K das verlangte Dreyeck.

E r k l ä r u n g 35.

§. 87. Die kleinste mögliche Linie von einem Punkte nach einem andern, oder nach einer Linie oder Fläche, heisst der Abstand oder die Entfernung (*distantia*) des Punkts vom andern Punkte oder von der Linie oder Fläche. Ist der Abstand zweyer Punkte von einem Punkte, von einer Linie oder Fläche gleich groß, so sagt man: die beyden

Punkte stehen von ihnen gleich weit ab. Ist aber der Abstand des einen größer, als der des andern, so heißt jener der **entferntere**, dieser der **nähere**.

Lehrsatz 16.

§. 88. Unter allen Linien, die von einem Punkte nach einem andern möglich sind, ist die gerade die kleinste.

Hypoth.	Fig.	Satz.
Von dem Punkte A nach dem Punkte B geht	23.	1) A C D E F B $\triangleright$ A B. 2) A G C H D I E K F L B $\triangleright$ A B. 3) A G C D E K F B $\triangleright$ A B.
1) Die gerade Linie A B.		
2) Die gebrochene A C D E F B.		
3) Die krumme A G C H D I E K F L B.		
4) Die vermischte A G C D E K F B.		

Vorbereitung.

Ziehe von A aus nach den Ecken, D, E, F die geraden Linien A D, A E, A F.

B e w e i s .

I. T h e i l .

1) Da $A C D$ ein Dreyeck ist, so ist

$$A C + C D > A D \quad (§. 82.); \text{ folglich}$$

$$A C + C D + D E > A D + D E$$

(§. 31.)

2) Aber $A D + D E > A E$ (§. 82.); also

um so mehr

$$A C + C D + D E > A E \quad (§. 36.). \text{ Dem-}$$

nach

3) $A C + C D + D E + E F > A E$

$+ E F$ (§. 31.), und da wiederum

$$\underline{A E + E F > A F} \quad (§. 82.); \text{ um so}$$

viel mehr

$$A C + C D + D E + E F > A F$$

(§. 36.) Endlich

4) $A C + C D + D E + E F + F$

$B > A F + F B$ (§. 31.); folglich, da

wiederum

$$\underline{A F + F B > A B}, \quad (§. 82.); \text{ um so viel-}$$

mehr

$$A C + C D + D E + E F + F B >$$

$A B$ (§. 36.), d. i. $A C D E F B >$

$A B.$

II. T h e i l.

Da p. dem. (I. Th.) die gebrochene Linie von A nach B um so viel grösser wird, als die zwischen eben diesen Punkten liegende gerade, je mehr der Theile sind, woraus sie besteht, und da die Zahl ihrer Theile in eben dem Maasse zunimmt, als sie der krummen Linie zwischen eben diesen Punkten näher kommt, folglich mit dieser mehrere Punkte gemein hat; so ist offenbar, daß sie die gerade um destomehr übertreffen müsse, je mehr Punkte sie mit der krummen gemein hat, und daß sie folglich die gerade am allermeisten übertreffen würde, wenn sie alle Punkte mit der krummen gemein hätte, oder ganz in die krumme überginge.

Da aber die nämlichen Schlüsse von jeder andern krummen Linie zwischen diesen Punkten, und jeder gebrochenen, deren Theile sämtlich Sehnen von jener sind, gelten; so ist jede krumme Linie grösser als jede gebrochene zwischen den nämlichen Endpunkten, deren Theile Sehnen von ihren Bogen sind.

Da nun p. dem.

$A C D E F B \succ A B$, aber
 $A G C H D I E K F L B \succ A C D E F B$, so ist um so viel mehr $A G C H D I E K F L B \succ A B$ (§. 36.)

III. T h e i l.

P. dem. (II. Th.) ist jede krumme Linie grösser als die gerade zwischen den nämlichen Endpunkten, folglich auch jeder Bogen einer krummen Linie grösser als seine Sehne. Jede vermischte Linie aber besteht aus geraden Linien und Bogen von krummen. Wollte man nun an die Stelle dieser Bogen deren Sehnen setzen, so würde schon die daraus entstehende gebrochene Linie grösser seyn, als die gerade zwischen den nämlichen Endpunkten, p. dem. (I. Th.). Da aber p. dem. (II. Th.) jeder Bogen einer krummen Linie grösser ist, als seine Sehne, so ist offenbar die vermischte Linie grösser, als jene gebrochene, folglich noch vielmehr die vermischte grösser, als die gerade zwischen den nämlichen Endpunkten (§. 36.); d. h.

$A G C D E K F B \succ A B.$

Zus. Der Abstand eines Punkts A von einem andern B ist also die gerade Linie A B (§. 87. vergl. §. 44. A.)

A n m e r k u n g 1.

Der Beweis dieses Lehrsazes setzt von der krummen Linie keine andere Vorstellung voraus, als die, daß die gebrochene ihr immer näher und näher gebracht werden könne, wenn man die Zahl ihrer Theile immer größer und größer, folglich diese Theile selbst kleiner und kleiner macht, d. h. daß die krumme die Grenze (*limes*) der gebrochenen sey.

A n m e r k u n g 2.

Euklides hat von diesem Saze nur den ersten Theil, nämlich den Saz: die gerade Linie ist kleiner, als jede gebrochene zwischen den nämlichen Endpunkten, bewiesen (El. 1, 20.). Archimedes hingegen hat den Saz in seiner ganzen Allgemeinheit, vor seinen Untersuchungen über die Kugel und den Cylinder, als ein Axiom aufgeführt. Spätere Geometer sind ihm dar-

in gefolgt, nur zum Theil mit dem Unterschiede, daß sie den Satz unter dem etwas veränderten Ausdrucke: die gerade Linie ist der kürzeste Weg von einem Punkte zum andern, als Definition zum Grunde gelegt haben, wie noch ganz neuerlich Legendre * gethan hat. Allein da der Satz in der That eben so wenig eine Definition, als ein Axiom, sondern ein Lehrsatz ist, so muß er, so gut wie andere Lehrsätze, bewiesen werden.

L e h r s a t z 17.

§. 89. Wenn eine gerade Linie und außer dieser ein Punkt angenommen wird, und von diesem mehrere gerade Linien nach der angenommenen gehen, von welchen eine lothrecht auf ihr aufsteht, die übrigen aber unter schiefen Winkeln mit ihr zusammen treffen; so ist unter allen diesen Linien die lothrechte die kleinste, von den schief aufstehenden aber jede der lothrechten näher kleiner, als die entferntere; auch gehen von dem angenommenen Punkte

* *Elémens de Géométrie*. Paris 1794. Def. III.

aus nur zwey gleiche gerade Linien auf entgegengesetzten Seiten der lothrechten, nach der angenommenen geraden Linie.

Hypoth.	Fig.	Satz.
1) Von C aus gehen CD, CE, CF, C G, CH nach AB, so daß CD loth- recht, die übrigen aber schief aufste- hen.	24.	1) $CE \succ CD$. 2) $CF \succ CE$. 3) $CG \succ CF$. 4) $CH = CF$. 5) Ausser CH kann keine der CF gleiche ge- rade Linie von C nach AB gehen.
2) $DH = DF$.		

B e w e i s.

1) Da (p. hyp.) $CDE = R$, folglich $CED \less R$ (§. 80. Z. 4.), so ist $CE \succ CD$ (§. 81.).

2) Da (p. dem. 1.) $CED \less R$, so ist $CEF \succ R$ (§. 75. Z. 1.), und mithin $FCE \less R$ (§. 80. Z. 4.); folglich $CF \succ CE$ (§. 81.).

3) Da (p. dem. 2.) $CFE \less R$, so ist $CFG \succ R$ (§. 75. Z. 1.), also $CGF \less R$, (§. 80. Z. 4.); folglich $CG \succ CF$ (§. 81.):

Demnach ist die lothrechte $C D$ die kleinste, und von den übrigen jede der lothrechten nähere kleiner, als die entferntere.

4) Da (p. hyp.) $C D F = C D H = R$, und $D F = D H$, auch $C D = C D$, so ist $C F = C H$ (§. 66.)

5) Wäre nun ausser der $C H$ noch eine andere, wie die $C K$, der $C F$ gleich, so wäre auch $C H = C K$ (§. 25.), d. h. die der lothrechten $C D$ nähere der entfernteren gleich, welches (p. dem. 1. 2. 3.) unmöglich ist.

Zus. 1. Demnach ist der Abstand eines Punkts (C) von einer geraden Linie ($A B$) das Loth ($C D$), was von jenem nach dieser geht.

Zus. 2. Von einem Punkte können nach der nämlichen geraden Linie nicht drey gleiche gerade Linien gehen, weil sonst von diesem Punkte aus zwey gleiche gerade Linien auf einerley Seite des Loths nach der angenommenen geraden Linie gehen müssten, welches (p. dem. 5.) unmöglich ist.

Zus. 3. Zwey schiefe Linien ($C F$, $C H$), welche von dem Lothe ($C D$) gleich weit abstehen, machen sowohl mit dem Lothe, als

mit der geraden Linie (A B), auf welcher sie aufstehen, gleiche Winkel (§. 69.).

Zus. 4. Zwey schiefe Linien (C F, C H), die auf der geraden (A B) unter gleichen Winkeln aufstehen, sind gleich und vom Lothe (C D) gleichweit entfernt (§. 79.).

Zus. 5. Zwey schiefe Linien (C F, C H), die mit dem Lothe (C D) gleiche Winkel machen, sind gleich, und stehen von demselben gleich weit ab (§. 79.).

Zus. 6. Jede der schiefen Linien (C E, C F, C G etc.) steht auf der angenommenen geraden Linie (A B) unter ungleichen Nebenwinkeln auf, von welchen der spize mit dem Lothe (C D) immer auf der nämlichen, der stumpfe hingegen auf der entgegengesetzten Seite der schiefen Linie liegt.

Zus. 7. Wenn daher die gleichartigen (spizen oder stumpfen) Winkel zweyer schiefstehenden Linien (C E, C F) mit der angenommenen geraden Linie (A B) beyde auf einerley Seite dieser Linien liegen, so liegen diese Linien selbst auf einerley Seite des Loths (C D). Liegen hingegen die gleichartigen Winkel zweyer schiefen Linien (C F, C H) auf entgegengesetzten Seiten dieser Linien, so liegen diese Linien selbst auf entgegengesetzten Seiten des Loths.

Zus. 8. Demnach fällt das Loth von der Spitze eines Dreyecks nach dessen Grundlinie, wenn beyde Winkel an der Grundlinie spiz sind, innerhalb, wenn hingegen der eine dieser Winkel stumpf ist, ausserhalb des Dreyecks:

Lehrsatz 18.

§. 90. Wenn in zwey Dreyecken, zwey und zwey Seiten einander stückweise gleich sind, aber der von den gleichen Seiten eingeschlossene Winkel in dem einen grösser ist, als in dem andern, so ist auch die Grundlinie des einen grösser, als die Grundlinie des andern:

Hypoth.	Fig.	Satz.
1) $AB = DE$	25.	$BC > EF$
2) $AC = DF$		
3) $BAC > EDF$		

Vorbereitung.

Von den Seiten DE , DF nimm die, welche nicht grösser, als die andere ist; sie sey DE . Mache $EDG = BAC$ (§. 85.), $DG = AC$ (§. 65.), und ziehe FG , EG .

B e w e i s.

1) Da (p. hyp.) $AB = DE$, und (p. constr.) $AC = DG$ auch $BAC = EDG$; so ist $BC = EG$ (§. 66.).

2) Da (p. constr.) $DG = AC$, aber (p. hyp.) $AC = DF$, so ist auch $DG = DF$ (§. 25.), folglich $DGF = DFG$ (§. 67.).

3) Nun ist $DGF > EGF$ (§. 24.), folglich auch $DFG > EGF$.

4) Aber es ist wiederum $EFG > DFG$ (§. 24.); folglich ist noch vielmehr $EFG > EGF$ (§. 36.); und mithin $EG > EF$ (§. 81.).

5) Aber (p. dem. 1.) ist $EG = BC$, folglich auch $BC > EF$.

L e h r s a z 19.

§. 91. Wenn in zwey Dreyecken zwey und zwey Seiten einander stückweise gleich sind, aber die Grundlinie des einen grösser ist, als die Grundlinie des andern; so ist auch dervon den gleichen Seiten eingeschlossene Winkel in dem einen grösser als in dem andern.

Hypoth.	Fig.	Satz.
1) $A B = D E$	25.	$B A C \supset E D F$
2) $A C = D F$		
3) $B C \supset E F$		

B e w e i s.

Wäre nicht $B A C \supset E D F$, so wäre entweder $B A C = E D F$, oder $B A C \subset E D F$ (§. 22.).

1) Wäre $B A C = E D F$, so wäre $B C = E F$ (§. 68.) gegen die Voraussetzung. (3)

2) Wäre $B A C \subset E D F$, so wäre $B C \subset E F$ (§. 90.), eben so gegen die Voraussetzung (3); folglich muß $B A C \supset E D F$ seyn.

L e h r s a z. 20.

§. 92. Wenn man drey ebene Winkel hat, deren jede zwey zusammen grösser, als der dritte, sind, und die von gleichen geraden Linien eingeschlossen werden; so sind auch von den Linien, welche die Endpunkte der gleichen Schenkel verbinden, jede zwey zusammen grösser, als die dritte.

Hypoth.	Fig.	Satz.
$A B C, D E F, G H$ K sind drey ebene	26.	1) $A C + D F \supset G K$

Winkel, so daß

$$1) \ A B C + D E$$

$$F > G H K.$$

$$2) \ D E F + G H$$

$$K > A B C.$$

$$3) \ G H K + A B$$

$$C > D E F.$$

$$2) \ D F + G K$$

$$> A C.$$

$$3) \ G K + A C$$

$$> D F.$$

V o r b e r e i t u n g.

1) Seze an den Punkt H der geraden Linie HK den Winkel $K H L = A B C$ (§. 85.).

2) Mache $H L = H K$ und ziehe $G L$, $K L$.

B e w e i s.

1) Sind die Winkel $A B C$, $D E F$, $G H K$ einander gleich, so ist der Satz für sich klar.

2) Sind sie aber ungleich, und ist die beschriebene Vorbereitung gemacht worden, so hat man, da $A B = H K$ (p. hyp.) und $B C = H L$ auch $A B C = K H L$ (p. constr.) $A C = K L$ (§. 66.).

3) Da $A B C + G H K > D E F$ (p. hyp.) aber

$A B C = K H L$ (p. constr.), so ist auch

$$\left. \begin{array}{l} G H K + K H L \\ G H L \end{array} \right) > D E F$$

4) Da $G H = D E$ (p. hyp.) $H L = E F$ (p. constr.), aber $G H L > D E F$ (p. dem. 3.); so ist $G L > D F$ (§. 90.).

5) Nun ist $G K + K L > G L$ (§. 82); also noch vielmehr $G K + K L > D F$ (§. 36.).

6) Aber (p. dem. 2.) ist $K L = A C$, folglich auch $G K + A C > D F$.

7) Nun kann eben so gezeigt werden, dafs auch $A C + D F > G K$, und $G K + D F > A C$ sey.

A n m e r k u n g.

Dieser Satz wird bey der Construction des körperlichen Winkels, wo es darauf ankommt, aus den drey Linien $A C$, $D F$, $G K$ ein Dreyeck zu verzeichnen, gebraucht.

L e h r s a z 21.

§. 93. Wenn in der Mitte einer geraden Linie ein Loth aufgestellt ist, so hat jeder Punkt in dem Lothe einen gleichen, jeder Punkt ausserhalb desselben einen ungleichen Abstand von den Endpunkten dieser geraden Linie.

Hypoth.	Fig.	Saz.
1) $A C = C B$	27.	1) $DA = DB$.
2) $E C A = E C B$		2) $FA > FB$.
3) Dist ein Punkt in C E , F ein Punkt ausser C E.		

Vorbereitung.

1) Ziehe von F nach A die Linie F A ,
welche das Loth C E in D schneiden wird
(§. 55. Z. 3.).

2) Ziehe D B und F B.

B e w e i s .

I. T h e i l .

Da (p. hyp.) $A C = C B$, so stehen zwey
aus jedem Punkte D des Loths C E nach
den Endpunkten A , B gehende gerade Li-
nien D A , D B von dem Lothe gleichweit
ab, und sind folglich einander gleich (§. 89.).
Ist aber dies, so hat auch jeder Punkt D in
dem Lothe C E von den Endpunkten A , B
der geraden Linie A B gleichen Abstand
(§. 88. Z.).

II. T h e i l .

Da (p. hyp.) D ein Punkt in dem Lothe
C E ist, so ist p. dem. (I. Th.) $DB = DA$.
Es ist aber

$F B < F D + D B$ (§. 82. Z.) folglich auch

$$F B < F D + D A, \text{ d. i. } F B < F A.$$

Zus. 1. Jeder Punkt, der von zwey Punkten A, B einer geraden Linie $A B$ gleich weit absteht, muß in dem Lothe auf $A B$ liegen, das in der Mitte zwischen diesen Punkten aufsteht.

Zus. 2. Eine gerade Linie, welche zwey von $A B$ gleich weit abstehende Punkte D, E verbindet, muß also ein Stück von diesem Lothe seyn.

Zus. 3. Wenn von zwey Punkten (A, B) einer geraden Linie ($A B$) so viel Paare einander gleicher und sich schneidender gerader Linien ($A D, B D$) als man will, ausgehen, so liegen die sämtlichen Durchschnittspunkte dieser Linien in einem Lothe ($C E$), was mitten zwischen den angenommenen Punkten A, B aufsteht.

Anmerkung.

Darauf gründet sich die gewöhnliche praktische Auflösung der Aufgabe (§. 71.).

Erklärung 36.

§. 94. Ein Dreyeck heißt rechtwinkelig, wenn es einen — schiefwinke-

lig, wenn es keinen rechten Winkel enthält. Es heißt ferner stumpfwinkelig, wenn es einen stumpfen; spizwinkelig hingegen, wenn es lauter spize Winkel enthält. In rechtwinkligen Dreyecken heißt die dem rechten Winkel gegenüber liegende Seite Hypotenuse (*hypotenusa*), von dem griechischen ὑποτείνουσα, i. e. *linea subtendens angulum rectum*, und die den rechten Winkel einschliessenden Seiten heißen Katheten (*catheti*), von dem griechischen Καθετος (*perpendicularis*).

Zus. Demnach sind die schiefwinkligen Dreyecke entweder stumpfwinkelige oder spizwinkelige.

A n m e r k u n g.

Diese Eintheilung der Dreyecke gründet sich auf (§. 80. Z. 4.).

L e h r s a z 22.

§. 95. Zwey rechtwinkelige Dreyecke sind congruent, wenn die Hypotenuse und eine der Katheten in beyden gleich ist.

Hypoth.

Fig.

Saz.

$$1) ABC = DEF = R \quad 28. \quad 1) BC = EF$$

$$2) \ A \ C = D \ F. \quad 2) \ \triangle B \ A \ C \stackrel{s}{=} \triangle E \ D \ F.$$

$$3) \ A \ B = D \ E. \quad \triangle E \ D \ F.$$

B e w e i s.

Wäre nicht $B \ C = E \ F$, so sey $B \ C > E \ F$; mache also $B \ G = E \ F$ und ziehe $A \ G$.

Da nun (p. hyp.) $A \ B = D \ E$ auch $A \ B \ C = D \ E \ F$, und (p. constr.) $B \ G = E \ F$, so wäre $\triangle A \ B \ G \stackrel{s}{=} \triangle D \ E \ F$ (§. 66.), und mithin $A \ G = D \ F$. Aber (p. hyp.) ist $A \ C = D \ F$; folglich wäre $A \ G = A \ C$ (§. 25.) wider (§. 89.), welches unmöglich ist. Die $B \ C$ kann also der $E \ F$ nicht ungleich, und muß ihr folglich gleich seyn. Ist aber $B \ C = E \ F$, so ist, da (p. hyp.) $A \ C = D \ F$, und $A \ B = D \ E$, auch $\triangle B \ A \ C \stackrel{s}{=} \triangle E \ D \ F$ (§. 69.).

Zu s. Demnach ist ein rechtwinkeliges Dreyeck durch die Hypotenuse und eine der Katheten gegeben.

L e h r s a z 23.

§. 96. Zwey schiefwinkelige Dreyecke sind congruent, wenn zwey Seiten und ein gegenüberliegender Winkel in beyden gleich sind, — und der zweyte gegenüberliegende

Winkel in beyden von einerley Art (spiz oder stumpf) ist.

Hypoth.	Fig.	Saz.
1) $A B = D E$	29.	$\triangle A B C \cong$
2) $B C = E F$		$\triangle D E F.$
3) $B A C = E D F$		
4) entweder $\left. \begin{matrix} A C B \\ D F E \end{matrix} \right\} < R,$		
oder $\left. \begin{matrix} A C B \\ D F E \end{matrix} \right\} > R.$		

V o r b e r e i t u n g.

Fälle von B nach A C oder deren Verlängerung das Loth B G, und von E nach D F oder deren Verlängerung das Loth E H, so stellt die Figur beyde Fälle dar.

B e w e i s.

1) Da (p. hyp.) $A B = D E$, $B A C = E D F$, und (p. constr.) $A G B = D H E = R$, so ist $\triangle A B G \cong \triangle D E H$ (§. 79.), und es fällt also, wenn man sich das $\triangle A B G$ über das $\triangle D E F$ so gelegt vorstellt, daß der Punkt A auf den Punkt D, und die Seite A B längs der D E zu liegen kommt, A G

mit D H, B mit E, und B G mit E H zusammen. Alsdann aber sind B C, E F zwey von einem Punkte eines Loths nach einer geraden Linie (den zusammenfallenden A C, D F) gehende schiefe Linien.

2) Da nun (a) die den zusammenfallenden Seiten A B, D E gegenüber, folglich auf einerley Seite der schiefen B C, E F liegenden Winkel A C B, D F E (p. hyp.) beyde gleichartig sind; so müssen die schiefen Linien B C, E F auf einerley Seite des Lothes liegen (§. 89. Z. 7.), und da (b) B C = E F (p. hyp.), so müssen beyde zusammenfallen, und einander decken (§. 89. und §. 41. Z. 4.); folglich muß der Punkt C auf den Punkt F fallen.

3) Da nun (p. dem. 1.) auch der Punkt A auf dem D, und die Seite A C längs der D F liegt, so muß die A C die D F decken (§. 20.).

4) Aber (p. dem. 1.) deckt auch die Seite A B die D E, folglich decken alle drey Seiten der Dreyecke A B C, D E F einander; und mithin ist $\triangle A B C \cong \triangle D E F$ (§. 69.).

Zus. Demnach ist ein schiefwinkeliges Dreyeck durch die gegebene Quantität zweyer Seiten und eines gegenüberliegenden Winkels nur alsdann gegeben, wenn der andere gegenüberliegende Winkel zugleich der Art nach gegeben, d. h. wenn es bestimmt ist, ob er spiz oder stumpf seyn soll.

L e h r s a z 24.

§. 97. In jedem Dreyecke sind die drey inneren Winkel zusammen zwey rechten gleich.

Hypoth.	Fig.	Saz.
A B C ist ein Δ	30.	$BAC + ABC + ACB = 2 R.$

V o r b e r e i t u n g.

1) Bringe das Δ A B C in eine solche Lage, daß dessen kleinster Winkel A C B zur rechten Hand falle.

2) Halbire die Seite B C in dem Punkte D, ziehe die A D, und verlängere sie, bis $DE = AD$, hierauf ziehe die B E, C E.

3) Nun halbire die Seite C E in dem Punkte F, ziehe die B F, und verlängere

sie, bis $F G = B F$, alsdann verbinde die $E G$, $C G$.

4) Halbire die Seite $C G$ in dem Punkte H , ziehe die $E H$, und verlängere sie, bis $H I = E H$, und verbinde sofort die $G I$, $C I$.

5) Halbire die Seite $C I$ in dem Punkte K , ziehe die $G K$ und verlängere sie, bis $K L = G K$, alsdann verbinde die $I L$, $C L$.

6) Halbire die Seite $C L$ in dem Punkte M , ziehe die $I M$, verlängere sie, bis $M A = I M$, und ziehe zuletzt noch $A L$.

B e w e i s.

1) Da (p. constr.) $A D = D E$, $B D = D C$, und $A D B = C D E$ (§. 77.); so ist (§. 66.) $A B C = B C E$ und $A B = C E$; folglich, da auch $B C = B C$, $\triangle A B C \cong \triangle B C E$ (§. 66.).

2) Eben so ist zu beweisen, daß

$\triangle A B C \cong \triangle C E G \cong \triangle C I G \cong \triangle I C L$ sey.

3) Ist aber dies, so sind in allen diesen Dreyecken, die den gleichen Seiten gegenüberliegende Winkel einander gleich (§. 66.);

also $E C G = B A C$, $G C I = A C B$,
 $I C L = B C E = A B C$ (p. dem. 1.).

4) Wird nun, nach Angabe der Vorbe-
 reitung, $C L$ in M halbt, hierauf die $I M$
 gezogen, und in gerader Richtung verlän-
 gert; so muß der Endpunkt der, der Li-
 nie $I M$ gleichen, Verlängerung derselben
 mit dem Punkte A zusammen fallen, weil
 er schlechterdings in keinen andern Punkt
 fallen kann. Denn er kann nicht fallen

a) in einen andern Punkt der Linie
 $A C$ selbst

α) nicht diesseits von A in N ,
 denn, wäre dies, so hätte man, da (p.
 constr.) $LM = MC$, $IM = MN$, und
 $IML = CMN$ (§. 77.), $\triangle MLI \stackrel{\circ}{=} \triangle MCN$
 (§. 66.), und mithin $IL = CN$.
 Nun ist aber (p. dem.) $AC = IL$; folglich
 wäre $AC = CN$, wider (§. 24.), welches
 unmöglich ist.

β) Nicht jenseits von A in O ;
 denn alsdann wäre, weil (p. constr.) $IM =$
 MO , $LM = MC$, und (§. 77.) $IML =$
 CMO , folglich $\triangle MLI \stackrel{\circ}{=} \triangle MO$

$C O$ (§. 66.), $I L = O C$. Aber (p. dem.) ist $I L = A C$, folglich wäre $O C = A C$, wider (§. 24.), welches unmöglich ist.

b) Nicht in einen andern Punkt ausser der Linie $A C$

$\alpha\alpha$) nicht diesseits von $A C$ in P ; denn, wäre dies, so hätte man, wie vorhin, $\triangle M I L \cong \triangle M C P$; folglich $I L = C P$. Aber (p. dem.) $I L = A C$; also auch $C P = A C$.

Nun ist (p. hyp. u. §. 80. Z. 4.) $C I L < R$, also noch vielmehr $\left. \begin{matrix} M I L \\ M I C \end{matrix} \right) < R$; aber

$M I L = C P M$ (p. dem.), folglich auch $C P M < R$. Folglich sind die Winkel bey P . und I an der Grundlinie des $\triangle C P I$ beyde spiz, und mithin muß ein Loth von der Spitze C nach der Grundlinie $P I$ innerhalb des $\triangle C P I$ fallen (§. 89. Z. 8.). Ist aber dies, so hat man alsdann auf einerley Seite des Loths zwey gleiche gerade Linien $C P$, $A C$, wider (§. 89.), welches unmöglich ist.

$\beta\beta$) Nicht jenseits von $A C$ in Q ; denn in diesem Falle wäre, wie vorhin,

$\triangle M I L \stackrel{s}{=} \triangle M C Q$, folglich $IL = CQ = AC$, und $CQM = M I L$. Da nun (p. dem.) $M I L < R$, so ist auch $CQM < R$. Aber (p. dem.) ist auch $CIM < R$; folglich sind die Winkel bey Q und I an der Grundlinie des $\triangle C Q I$ beyde spiz, und ein Loth von C nach $I Q$ muß also innerhalb des $\triangle C Q I$ fallen (§. 89. Z. 8.).

Nun kann aber dieses Loth nicht zwischen CQ und CA fallen. Denn, wäre dies, so wäre $CM > CA$ (§. 89.); und weil (p. dem.) $CM = ML$, und $CA = IL$, auch $ML > IL$, da doch (p. hyp.) $CIL < \angle CL$, folglich $CL < IL$ (§. 81.); also noch vielmehr $ML < IL$ ist. Das Loth von C nach $I Q$ muß also nothwendig zwischen CA und CI fallen; alsdann hat man aber wiederum auf einerley Seite des Loths zwey gleiche gerade Linien CA , CQ , wider (§. 89.), welches unmöglich ist.

Folglich muß der Endpunkt der, der Linie IM gleichen Verlängerung von ihr nothwendig in den Punkt A fallen.

5) Fällt aber der Endpunkt der, der Linie $I M$ gleichen, Verlängerung von ihr in den Punkt A , so ist $A M = I M$; und da (§. 66.) $I M = B F$ (weil p. dem. $C M = C F$, $C I = C B$, und $I C M = B C F$), so ist auch $A M = B F$ (§. 25.). Aber (p. constr.) ist $B F = F G$; folglich auch $A M = F G$.

6) Nun ist (p. dem.) auch $A C = C G$ und $C M = C F$, folglich (§. 69.) $\triangle A M C \cong \triangle F G C$, und mithin $A C M = F C G$.

7) Nun ist (p. dem. 3.) auch $B C E = I C L$, folglich auch $A C I = B C G$ (§. 28).

8) Es ist aber auch $A C B = G C I$; folglich (§. 77. Z. 6.) sowohl $A C G$ als $B C I$ und $E C L$ eine gerade Linie.

9) Ist aber dies, so liegen auf beyden entgegengesetzten Seiten von jeder dieser drey geraden Linien die drey inneren Winkel des $\triangle A B C$ an dem Punkte C an einander.

Denn, nimmt man z. B. die Linie $A C G$, so ist $A C B + B C E + E C G$
 $G C I + I C L + A C L) = 2 R$ (§. 75); aber

(p. dem. 3. 6.) ist $A C B = G C I$, $\begin{matrix} B C E \\ I C L \end{matrix} \begin{pmatrix} = A \\ B C, \end{pmatrix}$

$\left. \begin{matrix} E & C & G \\ A & C & L \end{matrix} \right\} \equiv B A C$; folglich auch

$$A C B + A B C + B A C = 2 R.$$

Zus. 1. Wird eine Seite (B C, 16 F.) eines Dreyecks verlängert; so ist der äussere Winkel (A C D) so gross, als die beyden gegenüberliegenden inneren (A B C und B A C) zusammen. Denn

$$A B C + B A C + A C B = 2 R \text{ (Lehrs. 24.) und } A C D + A C B = 2 R. (\S. 75.),$$

folglich $A B C + B A C + A C B = A C D + A C B$ (§. 25.) und mithin $A B C + B A C = A C D$ (§. 29.).

Zus. 2. In jedem Dreyecke ist der dritte Winkel die Ergänzung der beyden andern zu zwey rechten; folglich ist durch zwey Winkel eines Dreyecks allemal auch der dritte gegeben.

Zus. 3. Wenn daher in zwey Dreyecken zwey und zwey Winkel einander stückweise gleich sind, so ist auch der dritte Winkel des einen dem dritten Winkel des andern gleich.

Zus. 4. Im gleichschenkeligen Dreyecke sind durch einen Winkel alle gegeben.

Zus. 5. Im gleichseitigen Dreyecke beträgt jeder Winkel zwey Drittheile eines rechten.

Zus. 6. Im rechtwinkligen Dreyecke sind die beyden spizen Winkel zusammen einem rech-

ten, und im rechtwinkligen gleichschenkeligen Dreyecke ist jeder der spizen Winkel einem halben rechten gleich.

Zus. 7. Wird daher auf einem der Schenkel eines rechten Winkels von der Spitze aus ein willkührliches Stück abgeschnitten und über demselben ein gleichseitiges Dreyeck beschrieben, so wird dadurch der rechte Winkel in zwey ungleiche Theile getheilt, wovon der grössere $= \frac{2}{3} R$, und der kleinere $= \frac{1}{3} R$ ist.

Zus. 8. Halbirt man den Winkel des gleichseitigen Dreyecks, so ist dessen Hälfte $= \frac{1}{3} R$.

Zus. 9. Ist ein Winkel eines Dreyecks so groß, als die beyden andern zusammen, so ist solcher ein rechter.

Zus. 10. In jeder vierseitigen Figur betragen die inneren Winkel zusammen vier rechte.

Denn die Figur wird durch die Diagonale in zwey Dreyecke getheilt.

Zus. 11. In jeder geradlinigen Figur betragen alle inneren Winkel zusammen zweymal so viel rechte Winkel, als die Figur Seiten hat, weniger vier rechte (F. 31).

Denn wenn man von irgend einem Punkte innerhalb der Figur gerade Linien nach allen Winkelspizen zieht, so erhält man eben so viele Dreyecke als die Figur Seiten hat, folglich auch eben so vielmal zwey rechte Winkel, oder

zweymal so viel rechte Winkel, von welchen aber die vier rechte, welche um den angenommenen Punkt herum liegen (§. 77. Z. 3.), abgezogen werden müssen.

Zus. 12. Wenn man alle Seiten einer geradlinigen Figur, jede über den einen ihrer Endpunkte hinaus, in gleicher Folge, verlängert, so sind die so entstehenden äusseren Winkel zusammen vier rechten gleich (F. 31.).

Denn jeder äusere Winkel beträgt mit seinem inneren Nebenwinkel zwey rechte; folglich betragen alle äusseren Winkel mit allen inneren zusammen so vielmal zwey rechte, oder zweymal so viel rechte, als die Figur Seiten hat. Eben so viel betragen aber auch die inneren Winkel zusammen, wenn ihnen vier rechte zugesetzt werden (Zus. 11.); folglich müssen die äusseren Winkel zusammen eben diese vier rechten Winkel betragen.

A n m e r k u n g.

Dieser Lehrsatz (24) ist der wahre Grundstein des Lehrgebäudes der Geometrie. Er ist in Euklids Elementen der 32ste Satz des 1sten Buchs, und zwar der zweyte Theil dieses 32sten Satzes, da unser obiger Zusatz 1. dessen ersten Theil ausmacht. Bekanntlich hat Euklid diesen Satz mittelst seiner

Theorie der Parallelen bewiesen, wobey er aber zu dem Beweise des ersten der umgekehrten Sätze von jenen, welche die Merkmale des Parallelismus zweyer Linien angeben, sich des umgekehrten von seinem 17ten Satze, unserem 12ten Lehrsatz, unter dem Titel des 11ten Axioms, bedient. Dabey wurde nun ein gedoppelter Fehler gegen die Methode begangen, einmal, wiefern ein Satz (die Converse des 17ten) als Axiom aufgestellt wurde, dem kein Geometer diesen Rang zugestehen konnte; und zweytens, wiefern ein Satz von einem andern (hier der 32ste von der Converse des 17ten), den er eigentlich begründen mußte, abhängig gemacht wurde. So allgemein nun die späteren Geometer den ersten dieser Fehler bemerkt und gerügt haben, eben so allgemein haben sie den zweyten — der doch in der That der grössere ist, weil er zu dem ersten verleitete — übersehen. Nur daraus wird es begreiflich, warum die Geometer bisher bey ihren Bemühungen, die in der Euklidischen Parallelentheorie vorhandene Lücke auf eine genugthuende Art auszufüllen, und von dem 11ten Axiome einen zwingenden Beweis zu geben, eher auf jeden andern, als den rechten Weg gerathen; also begreiflich, warum alle diese Bemühungen mislingen mußten. Ich hingegen konnte mich, gleich bey dem ersten Anfange

meiner Beschäftigungen mit Euklids Geometrie, wenn ich den 16ten Satz des ersten Buchs der Elemente mit dem 32sten verglich, des Gedankens nicht erwehren, daß Euklid eigentlich an der Stelle seines 16ten Satzes darauf ausgegangen sey, den 32sten zu beweisen, und daß nur die scheinbare Unmöglichkeit, solches mittelst der, bis dahin aufgestellten Prämissen zu leisten, ihn vermocht habe, sich damit zu begnügen, vor der Hand bloß die Realität der Differenz zwischen dem äußern Winkel an der verlängerten Seite eines Dreyecks und jedem seiner inneren Gegenwinkel darzuthun, und die Bestimmung der Quantität dieser Differenz noch so lange auszusetzen, bis er sich solche, durch Einschaltung mehrerer Zwischensätze, und unter diesen auch der Parallelentheorie, würde möglich gemacht haben. Zu diesem Gange konnte aber Euklides offenbar nur dadurch verleitet werden, daß er sich den zweyten Theil seines 32sten Satzes als vom ersten Theile desselben abhängig dachte. Wenn also in der That das Gegentheil Statt findet, und vielmehr dem zweyten Theile die Priorität vor dem ersten zukommt, — wovon man in der Folge den Beweis finden wird — so ist offenbar, daß sich eine völlig befriedigende Berichtigung der Euklidischen Parallelentheorie nicht eher zu Stande

bringen lasse, als bis der Satz von der Gleichheit der Summe der inneren Winkel des Dreyecks mit der Summe von zwey rechten, durch eine bindende Demonstration aus anderen rein geometrischen Gründen, von jener Theorie völlig unabhängig gemacht ist. Diese Ueberzeugung veranlafte mich daher, eine solche Demonstration dieses Satzes zu suchen, und der oben angeführte Gedanke, daß Euklid schon an der Stelle seines 16ten Satzes den Beweis von dem ersten Theile seines 32sten gesucht habe, verbunden mit der Betrachtung der großen Einfachheit des zweyten Theils dieses 32sten Satzes und seiner darauf beruhenden Priorität vor dem ersten, erregte in mir die Hoffnung, daß es nicht unmöglich seyn dürfte, den Beweis dieses Satzes aus Prämissen zu führen, die blos in den ersten fünfzehn Sätzen des ersten Buchs der Elemente enthalten sind. Ich machte mir daher dieses zur zweyten Bedingung bey meiner Demonstration, und fand auch in der That bald, daß sich mehr als eine Demonstration geben lasse, die beyden Bedingungen Genüge thue. Zweyen solcher Demonstrationen hat Herr Profesfor Hindenburg im Jahre 1799 die Ehre erwiesen, sie in seinem Archive der reinen und angewandten Mathematik bekannt zu machen, wo die eine im 9ten Hefte Nro. VI. die

andere im 10ten Hefte Nro. IV. zu finden ist. Man hat aber gegen die erste dieser Demonstrationen die Einwendung gemacht, daß man nicht genöthiget sey, mir die Lage der Lothe I K und A L (in der dortigen Figur) so, wie ich sie brauche, einzuräumen, und gegen die andere, daß sie den, der Geometrie fremden, Begriff der Bewegung vorausseze. Obgleich nun diese Einwendungen nicht unbeantwortlich sind, so bin ich doch weit entfernt, durch deren Beantwortung jene Demonstrationen rechtfertigen zu wollen. Vielmehr gestehe ich jedem Gegner gerne zu, daß hier die bloße Gedenkbarkeit einer Einwendung schon als ein Merkmal der Unzulänglichkeit einer Demonstration anzusehen sey. Aus diesem Grunde habe ich daher lieber eine ganz neue Demonstration des Satzes gegeben, gegen welche sich, nach meiner Ueberzeugung, wenigstens *bona fide*, nichts weiter einwenden läßt, als das einzige, daß sie blos von dem ungleichseitigen Dreyecke gelte. Allein diese Einwendung ist blos scheinbar. Denn von dem gleichschenkeligen Dreyecke ist es in der That für sich selbst klar, daß in Absicht auf daselbe die bey der Construction geforderte Bedingung der Lage eben so gut, wie bey dem ungleichseitigen, Statt finde. Was hingegen das gleichseitige Dreyeck betrifft, so läßt sich von diesem, durch die näm-

liche Construction leicht zeigen, daß es die Summe der inneren Winkel mit einem gleichschenkeligen gemein habe. Denn wenn in Fig. 30. $AC = AB = BC$ ist, so ist ACE das gleichschenkelige Dreyeck, welches mit dem gleichseitigen ABC einerley Summe der inneren Winkel hat, weil (p. dem.) $ACE = ACB + BCE = ACB + ABC$, und $AEC = BAC - BEA = BAC - EAC$, also $AEC + EAC = BAC$, und mithin $ACE + AEC + EAC = ACB + ABC + BAC$ ist. Demnach gilt der Satz in der That von allen Dreyecken ohne Ausnahme.

Da indessen der Geometer nicht voraussetzen darf, daß alle seine Gegner *bona fide* mit ihm umgehen werden, sondern vielmehr darauf gefaßt und im Stande seyn muß, auch die *malam fidem* dieses oder jenes einzelnen aufzudecken und in ihrer Blöße darzustellen — was bey der hier gegebenen Demonstration leicht zu verdrießlichen Weitläufigkeiten, wenigstens zu einer, der Deutlichkeit hinderlichen Ueberladung der Figur, mit Hülfslinien an der Ecke A führen dürfte — so habe ich nicht für überflüssig gehalten, von diesem wichtigen Satze noch eine andere Demonstration beyzubringen, welcher auch selbst diejenigen, die geflissentlich darauf ausgehen,

an der Binse Knoten zu suchen, nichts sollen anhaben können. Man wird diese Demonstration in der Folge an einem Orte finden, wo man sie gewifs am wenigsten erwartet hätte; und dort wird alsdann auch das, was hier noch über den Zusammenhang des Sazes mit dem Systeme hinzuzusezen wäre, sammt den übrigen dahin gehörigen Bemerkungen, seine schickliche Stelle finden.

A u f g a b e 10.

§. 98. Auf einer gegebenen geraden Linie in ihrem Endpunkte ein Loth aufzurichten.

Gegeben.

Fig.

Gesucht.

Die gerade Linie

32,

A D in A lothrecht auf A E.

A E

A u f l ö s u n g.

1) In A E nimm nach Willkühr einen Punkt B an, und beschreibe über A B ein gleichschenkeliges Dreyeck A C B (§. 64.).

2) Verlängere dessen Schenkel B C bis C D = B C, und ziehe A D; so ist diese das verlangte Loth.

B e w e i s.

1) Da (p. constr.) $A C = B C$, so ist $B A C = A B C$ (§. 67.).

2) Da $A C = C D$ (p. constr.), so ist $C A D = A D C$.

3) Demnach $B A C + C A D = A B C + A D C$, d. h. $B A D = A B D + A D B$ (§. 28.), und mithin $B A D = R$. (§. 97. Z. 9.).

E r k l ä r u n g 37.

§. 99. Die Lage (*Situs*) ist die Art des Nebeneinanderseyns (*modus coëxistendi*) gleichzeitiger Dinge, die nicht stetig zusammenhängen.

So spricht man z. B. von der Lage verschiedener Linien in einer Ebene, verschiedener Bäume in einem Garten oder Walde, verschiedener Häuser in einer Stadt, verschiedener Oerter auf der Oberfläche der Erde, verschiedener Weltkörper im Himmelsraume etc.

Zus. 1. Die Lage mehrerer gleichzeitigen Dinge wird also bestimmt, wenn die Beziehung ihrer Oerter gegen den Ort eines unter ihnen, den man als bekannt annimmt, angegeben wird.

Zus. 2. Demnach kann man eigentlich und genau genommen nicht von der Lage eines Dings an und für sich, und ohne seinen Ort auf

den Ort eines andern zu beziehen, sprechen, und wo das Wort *L a g e* so gebraucht wird, da wird es, nach einer im gemeinen Sprachgebrauche gewöhnlichen Verwechslung, schlechthin für gleichbedeutend mit *Ort* genommen.

Z u s. 3. Da die gleichzeitigen Dinge, von deren gegenseitiger Lage man sprechen kann, nicht stetig zusammenhängen (p. def.), so läßt sich zwischen jede zwey derselben eine gewisse Ausdehnung setzen, oder es findet zwischen ihnen eine gewisse Entfernung Statt. Demnach ist das einfachste und natürlichste Mittel, die gegenseitige Lage verschiedener gleichzeitigen Dinge zu bestimmen, die Angabe ihrer Entfernung von einander.

Z u s. 4. Da durch zwey Punkte eine gerade Linie ihrem Orte nach gegeben ist (§. 44. Z.), so ist es, um die Lage einer geraden Linie gegen eine andere zu bestimmen, genug, die Entfernung zweyer Punkte der ersten von der andern zu kennen. In Absicht auf die Entfernung dieser zwey Punkte aber sind drey Fälle möglich. Denn die Entfernung des nachfolgenden Punkts der einen geraden Linie von der andern ist entweder 1) eben so groß, oder 2) kleiner, oder 3) größer, als die des vorhergehenden.

Im ersten Falle haben beyde gerade Linien, ihrer ganzen Länge nach, einerley Entfernung

von einander, und daher ist es bey Bestimmung ihrer gegenseitigen Lage vollkommen einerley, welche von beyden man für die dem Orte nach bekannte annehmen will, weil bey jeder Voraussetzung die Lage der zweyten gegen die erste mit der Lage der ersten gegen die zweyte einerley bleibt. Im andern Falle hingegen entfernen sich beyde gerade Linien immer mehr und mehr von einander, und im dritten nähern sie sich einander immer mehr und mehr, je weiter man sie verlängert. Daher hat in diesen beyden Fällen jeder Punkt der ersten Linie von der zweyten einen andern Abstand, als der mit ihm zusammengehörige (durch das von ihm aus nach der zweyten Linie gehende Loth bestimmte) Punkt der zweyten Linie von der ersten hat; und mithin ist auch die Lage der zweyten Linie gegen die erste eine andere, als die der ersten gegen die zweyte ist.

Zus. 5. Hieraus erhellet zugleich der Grund, warum man im Falle der Ungleichheit des Abstandes zweyer Punkte einer geraden Linie von einer andern die Lage der ersten gegen die andere am bequemsten durch den Winkel angeben kann, den jene mit dieser einschließt. Denn, sobald dieser Winkel bekannt ist, so braucht man, um die Entfernung eines jeden Punkts der einen Linie von der andern anzugeben, nichts

weiter zu kennen, als den Abstand dieses Punkts von der Spitze des erwähnten Winkels, weil man alsdann in einem rechtwinkligen Dreyecke die Hypotenuse und einen spizen Winkel, folglich alles übrige, kennt (§. 79. Z. 2.).

Zus. 6. Zwey gleichzeitige Dinge haben also gegen ein drittes einerley Lage, wenn ihre Entfernungen von dem dritten gleich; sie haben hingegen eine verschiedene Lage gegen das dritte, wenn ihre Entfernungen von demselben ungleich sind (Zus. 3.).

So haben z. B. die Endpunkte der Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreyecks gegen dessen Spitze, und die sämtlichen Punkte der Kreislinie gegen deren Mittelpunkt, einerley Lage. Hingegen hat jeder Punkt ausser dem Lothe, was auf der Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreyecks in ihrer Mitte aufgestellt ist, gegen die Endpunkte der Grundlinie eine andere Lage als jeder Punkt in diesem Lothe (§. 93.).

Zus. 7. Zwey gerade Linien haben also einerley Lage gegen eine dritte, wenn beyde von der dritten unter gleichen Winkeln geschnitten werden (Zus. 6. 5.).

Zus. 8. Da der Begriff der Lage (p. def.) ein Verhältnißbegriff ist, so kann man unmöglich von Einerleyheit oder Verschiedenheit der Lage bey zwey Dingen an und für sich spre-

chen, sondern es muß immer ein drittes dazu genommen werden, auf dessen Ort die Oerter jener beyden bezogen werden müssen, um aus dem Resultate, was die Vergleichung dieser Beziehungen giebt, über die Einerleyheit oder Verschiedenheit der Lage jener beyden Dinge ein Urtheil zu fällen (Z. 1. 2. 6.).

A n m e r k u n g.

In diesen wenigen Sätzen sind die Gründe der ganzen Theorie der Lage enthalten. Zur Beruhigung für die Rigoristen von der Euclidischen Schule seze ich hinzu, daß ich diese Sätze hier nicht deswegen eingeschaltet habe, um in dem Systeme der Geometrie viel Gebrauch davon zu machen, sondern, theils deswegen, weil es, da man der darin aus einander gesetzten Begriffe doch nicht ganz entbehren kann, besser ist, sie in das nöthige Licht zu sezen, als sie ganz unerörtert zu lassen; theils auch, um zu zeigen, daß diese Erörterung nicht so viele Schwierigkeiten habe, wie man sich gewöhnlich einbildet, und daß diese Begriffe und alle ihre Folgen mit den der Geometrie eigenthümlichen Lehren und Vorstellungsarten vollkommen übereinstimmen. Endlich wollte ich zugleich bey dieser Gelegenheit einen Fingerzeig geben, wie man es, nach meiner Meinung, an-

greifen müßte, wenn man aus dem Begriffe der Lage — oder vielmehr aus den Constructionen, wozu die in den vorigen Zusätzen entwickelten Folgerungen aus diesem Begriffe führen — eine rein geometrische Parallelentheorie ableiten wollte.

Erklärung 38.

§. 100. Wenn zwey gerade Linien in einerley Ebene eine solche Lage gegen einander haben, daß sie verlängert nach einer von beyden Seiten zusammenstossen, so heißen sie nach dieser Seite zusammenlaufend oder convergent (*convergentes*), und nach der entgegengesetzten auseinanderlaufend oder divergent (*divergentes*). Ist hingegen ihre gegenseitige Lage so beschaffen, daß sie niemals zusammentreffen, so weit man sie auch nach beyden Seiten verlängern mag, so heißen sie gleichlaufend oder parallel (*parallelae*).

Zus. Demnach sind alle gerade Linien in einerley Ebene entweder nach einer Seite convergent und nach der andern divergent, oder einander parallel.

Erklärung 39.

§. 101. Wenn zwey gerade Linien (A B, C D 33 F.) von einer dritten (E F) geschnitten werden, so heißen die auf entgegengesetzten Seiten der schneidenden Linie liegenden Winkel (A G H, G H D, wie auch B G H, G H C) Wechselwinkel (*anguli alterni*).

Lehrsatz 25.

§. 102. Wenn zwey gerade Linien von einer dritten so geschnitten werden, daß entweder der äußere Winkel seinem inneren an der nämlichen Seite der schneidenden Linie liegenden, Gegenwinkel gleich ist, oder die Wechselwinkel einander gleich sind, oder die beyden inneren, an einerley Seite liegenden, Winkel zwey rechten gleich sind, so sind die beyden geraden Linien einander parallel.

Hypoth.

Fig:

Satz:

- 1) $\angle EGB = \angle GHD$, oder 33; $AB \parallel CD$.
- 2) $\angle AGH = \angle GHD$, oder
- 3) $\angle BGH + \angle GHD = 2 R$:

B e w e i s.

I. F a l l.

Wäre, unter der Voraussetzung, daß $E G B = G H D$, nicht $A B \nparallel C D$, so müßten beyde verlängert an der Seite A, C oder an der Seite B, D zusammentreffen. Gesezt also, sie träfen an der Seite B, D in dem Punkte I zusammen, so hätte man hier ein Dreyeck, an dessen verlängerter Seite G E der äussere Winkel E G B grösser seyn müßte, als sein innerer Gegenwinkel G H D (§. 78.); nach der Voraussetzung aber ist er diesem auch gleich, welches unmöglich ist. Folglich treffen die Linien A B, C D verlängert, an der Seite B, D nicht zusammen. Eben so kann aber gezeigt werden, daß sie auch an der Seite A, C nicht zusammentreffen; folglich treffen sie, verlängert, an keiner von beyden Seiten zusammen, und mithin ist $A B \nparallel C D$ (§. 100).

II. F a l l.

Da (p. hyp.) $A G H = G H D$; aber (§. 77.)

$\underline{A G H = E G B}$, so ist auch
 $E G B = G H D$ (§. 25.), folglich
 $A B \nparallel C D$ (p. dem. I.).

III. F a l l.

Da (p. hyp.) $B G H + G H D = 2 R$, aber
 auch $\underline{E G B + B G H = 2 R}$ (§. 75.), so

ist $E G B + B G H = B G H + G H D$, also

$$E G B = G H D \text{ (§. 29.),}$$

und mithin

$$A B \nparallel C D \text{ (p. dem. I.).}$$

Zus. Zwey gerade Linien, die auf einer
 dritten lothrecht stehen, sind parallel (p. dem. III).

A n m e r k u n g.

Obschon die drey Bedingungen dieses Satzes
 in einem solchen Zusammenhange stehen, daß,
 welche derselben man auch annehmen mag, alle-
 mal die beyden übrigen daraus folgen;
 so muß doch in Hinsicht auf (§. 99. Z. 5.)
 per ersten derselben die Priorität vor den bey-
 den andern zuerkannt werden.

A u f g a b e 11.

§. 103. Durch einen gegebenen Punkt
 mit einer gegebenen geraden Linie eine Pa-
 allele zu ziehen.

Gegeben.	Fig.	Gesucht.
1) Ein Punkt G.	33.	A B durch G par-
2) Eine gerade Li- nie C D.		allel der C D.

A u f l ö s u n g.

1) In der Linie C D nimm, nach Willkühr einen Punkt H an, ziehe die G H, und verlängere sie bis nach E.

2) An dem Punkte G der Linie H E mache $E G B = G H D$ (§. 85.).

3) Verlängere die B G in gerader Richtung nach A, so ist A B die verlangte Parallele.

B e w e i s.

Da (p. constr.) $E G B = G H D$, so ist $A B \parallel C D$ (§. 100.).

Forderung 6.

§. 104. Wenn man zwey ungleiche, aber gleichartige Gröſſen A, B hat, von welchen B die kleinere, A die gröſſere ist, durch fortgesetztes Hinzusezen der kleineren zu sich selbst, eine Gröſſe zu erzeugen, die gröſſer sey, als die gegebene gröſſere A.

A n m e r k u n g.

Die Möglichkeit dieser Gröſſen - Erzeugung, als eine Folge der unterscheidenden Eigenschaft gleichartiger Gröſſen, daſs ſie vervielfältiget einander übertreffen können, fordert Euklid vor dem zehnten Buche ſeiner Elemente.

L e h r s a z.

§. 105. Wenn man zwey ungleiche Gröſſen hat, und von der gröſſeren die Hälfte, oder mehr, als die Hälfte, und vom Reste wieder die Hälfte, oder mehr, als die Hälfte wegnimmt, und dies beſtändig ſo fortſetzt; ſo bleibt zuletzt eine Gröſſe übrig, die kleiner iſt, als die kleinere der Anfangs geſetzten Gröſſen.

Hypoth.

 $A B > C$

Fig.

34. a.

Saz.

Wenn man von $A B$ die Hälfte oder mehr, als die Hälfte, und vom Reste wieder die Hälfte oder mehr, als die Hälfte wegnimmt, und dies

beständig so fort-
setzt, so bleibt zu-
letzt ein Rest der
kleiner ist, als C.

Vorbereitung.

1) Die Grösse C wird, vervielfältiget, einmal grösser werden, als die Grösse A B (§. 104.). Vervielfältige sie also, und es sey D E ein Vielfaches der C, was zunächst grösser sey, als die A B.

2) Theile die D E in die der C gleiche Theile D F, F G, G E.

3) Nimm von der A B die Hälfte B H, von der A H aber wieder die Hälfte, H K, weg, und setze dies beständig so fort, bis die Zahl der Theile in der A B der Zahl der Theile in der D E gleich wird.

4) Es seyen also die Abtheilungen A K, K H, H B den Abtheilungen D F, F G, G E der Zahl nach gleich.

B e w e i s.

1) Da (p. constr.) $D E > A B$ ist, und man von der D E weniger, als die Häl-

te, die E G von der A B aber die Hälfte B H weggenommen hat, so ist der Rest $G D \succ H A$.

2) Da (p. dem. 1.) $G D \succ H A$, und man von der G D die Hälfte G F, und von der H A die Hälfte H K weggenommen hat, so ist der Rest $D F \succ A K$.

3) Es ist aber (p. constr.) $D F = C$; folglich auch $C \succ A K$ oder $A K \prec C$ (§. 35.)

Demnach ist von der Grösse A B die Grösse A K übrig geblieben, welche kleiner ist, als die Anfangs gesetzte kleinere Grösse C.

A n m e r k u n g 1.

Der Gang des Beweises ist der nämliche, wenn von der grösseren Grösse jedesmal mehr, als die Hälfte, weggenommen wird.

A n m e r k u n g. 2.

Mittelst dieses einfachen Sazes, der die Grundlage der ganzen Exhaustionsmethode ist, haben die Alten in der Geometrie erstaunenswürdige Dinge ausgerichtet.

A u f g a b e 12.

§. 106. Wenn eine Seite und ein anliegender Winkel gegeben ist, mit beyden ein Dreyeck zu verzeichnen, worin der Winkel, welcher der gegebenen Seite gegenüber liegt, kleiner sey, als jeder gegebene geradlinige Winkel.

Gegeben	Fig.	Gesucht
G H, als Seite u. G H D als anliegender Winkel eines Dreyecks.	34. b.	Ein Dreyeck, worin der, der Seite G H gegenüberliegende Winkel kleiner sey, als jeder gegebene geradlinige Winkel.

A u f l ö s u n g u n d B e w e i s.

1) In dem gegen D zu unbegrenzten Schenkel H D nimm, nach Willkühr, einen Punkt M an, und ziehe G M.

2) Mache $M N = G M$ und ziehe G N; so ist $M G N = G N M$ (§. 67.), folglich $G M H = 2 G N H$ (§. 97. Z. 1.), und mithin $G N H = \frac{1}{2} G M H$ (§. 27.).

3) Mache $\angle N O = \angle G N$, und ziehe $G O$, so ist, aus eben den Gründen, $\angle G O N = \frac{1}{2} \angle G N H$, also (p. dem. 2.) $\angle G O N = \frac{1}{4} \angle G M H$.

4) Wird dieses Verfahren noch weiter fortgesetzt, so wird in jedem nachfolgenden Dreyecke der an der rechten Hand liegende Winkel der Grundlinie mit dem einen der gleichen Schenkel halb so groß, als er im vorhergehenden war, und mithin (§. 105.) endlich kleiner, als jeder gegebene geradlinige Winkel.

L e h r s a z 26.

§. 107. Wenn zwey gerade Linien von einer dritten so geschnitten werden, daß die beyden inneren, an einerley Seite der schneidenden Linie liegenden Winkel kleiner, als zwey rechte sind, so treffen die beyden geraden Linien, weit genug verlängert, an eben der Seite zusammen.

Hypoth.	Fig.	Satz.
Die geraden Linien $C D$, $K L$ werden von der $E F$ so	34. b.	Die geraden Linien $C D$, $K L$ treffen, weit ge-

geschnitten, daß L
 $G H + G H D$
 $\angle 2 R.$ nug verlängert,
 an eben der Sei-
 te zusammen,
 wo die Winkel
 $L G H, G H$
 D liegen.

V o r b e r e i t u n g.

An dem Punkte G der Linie E F ma-
 che $E G B = G H D$ (§. 85.).

B e w e i s.

1) Da (p. constr.) $E G B = G H D$, u.
 $E G B + B G H = 2 R.$ (§. 75.); so ist auch
 $B G H + G H D = 2 R.$

2) Da (p. hyp.) $L G H + G H D < 2 R$,
 aber (p. dem. 1.) $B G H + G H D = 2 R$, so ist
 $L G H + G H D < B G H + G H D$
 (§. 35.), und mithin $L G H < B G H$
 (§. 32.).

3) Demnach liegt G L zwischen B G
 und G H, und B G L ist also ein gegebener Winkel.

4) Ueber G H verzeichne mit dem an-
 liegenden Winkel G H D (§. 106.) ein Drey-

eck, worin der, der Seite $G H$ gegenüberliegende Winkel $G O H$ kleiner ist, als der (p. dem. 3.) gegebene Winkel $B G L$.

5) Dies Dreyeck sey $G H O$, so ist, da
 $G H O + H G O + B G O = 2 R.$ (p. dem. 1.); aber auch

$$\underline{G H O + H G O + G O H = 2 R \text{ (§. 75. Z. 3.)};}$$

$$G H O + H G O + B G O = G H O + H G O + G O H \text{ (§. 25.)}; \text{ folglich } B G O = G O H \text{ (§. 29.)}.$$

6) Nun ist (p. constr.) $G O H < B G L$; also auch $B G O < B G L$ (§. 34.) u. mithin liegt $G L$ zwischen den Schenkeln $G H$, $G O$ des Winkels $H G O$.

7) Ist aber dies, so muß $G L$ weit genug verlängert, mit $H O$ zusammentreffen. Denn da die Linie $G L$ durch den Punkt L innerhalb des Dreyecks $G H O$ geht, so muß sie dessen Umfang zum wenigsten in zwey Punkten schneiden (§. 54. Z. 4). Nun ist einer dieser Durchschnittspunkte die Spitze des Winkels G . Läge also der andere Durchschnittspunkt nicht in der dem Winkel G gegenüberliegenden Seite $H O$, so

müßte er in einer der Seiten GH , GO liegen. Alsdann schlössen aber zwey gerade Linien einen Raum ein, welches (§. 45. Z. 2.) unmöglich ist.

Demnach muß die GL oder KL , weit genug verlängert, nothwendig mit der HO zusammentreffen, und zwar an eben der Seite, wo die Winkel LGH , GHD liegen.

A n m e r k u n g.

Dieser Lehrsatz (26) ist das berüchtigte eilfte Axiom der Euklidischen Elemente, für welches man nun seit mehr als zweytausend Jahren eine bindende Demonstration vergeblich gesucht hat. Die merkwürdigsten der bis zum Jahre 1763 bekannt gewordenen Versuche, diesen Satz zu beweisen, beurtheilt eine Disfertation des Herrn Prof. Klügel unter dem Titel: *Conatum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio. Göttingae 1763.* Von den merkwürdigsten der, in den folgenden dreyszig Jahren hinzugekommenen Bemühungen giebt Nachricht *Programma Academicum, quo duas vexatissimas Matheseos purae elementaris theorias enodare — conatur J. C. F. Hauff. Marburgi 1793.* Seit dem haben sich, ausser den oben

(§. 97. Anm.) genannten Versuchen im Hindenburgischen Archive, die Beweise der Herrn van Swinden, Le Gendre, und Schwab an diese Reihe angeschlossen. Die von Montucla (Hist. des Mathem. T. 1. p. 221.) aufgestellte Behauptung, daß dieser Satz von Euklid selbst erst nach dem 28sten aufgeführt, und in der Folge nur durch ungeschickte Editoren unter die Zahl der Axiome versetzt worden sey, gewinnt durch den Umstand einige Wahrscheinlichkeit, daß, nach der Erzählung des Clavius (*Schol. ad El. I, 28. Ed. Rom. 1589. T. I. p. 149.*) in Rom jemand eine arabishe Uebersetzung der Elemente belesen haben soll, worin das sogenannte 11te Axiom mit seinem Beweise in dieser Ordnung unter den Lehrsätzen gestanden habe.

Was die hier beygebrachte Demonstration dieses Satzes betrifft, so habe ich wohl nicht zu fürchten, daß jemand eine gegründete Erinnerung dagegen werde machen können. Sollte dies indessen doch geschehen, so bin ich bereit, entweder die Erinnerungen genugthuend zu beantworten, oder eine andere Demonstration zu geben, die solchen Erinnerungen nicht ausgesetzt ist. Denn ich meines Orts kenne kein, eines philosophischen Geometers unwürdigeres Urtheil, als folgendes ist: „Es wäre doch einmal Zeit,

„dafs Verfasser von Anfangsgründen, aus ver-
„unglückten Versuchen, die ins Hundert gehen,
„lernten, die Lehre von den Parallelen lasse sich
„nicht anders vortragen, als mit Euklid's
„Grundsätze, den man rechtfertigen kann, aber
„nicht, wie andere Sätze, beweisen.

(Götting. Gel. Anz. 1797. 140 St.)

Die Geometrie hat nur drey Wege zu ihren Sätzen zu gelangen; diese sind: Annehmen ($\lambda α μ β α ν ε ι ν$), Fordern ($α ι τ ε ι ν$) und Beweisen ($α π ο δ ε ι κ ν υ ν α ι$). Ein Mittelding zwischen Annehmen und Beweisen, unter dem Titel: Rechtfertigen, kennt sie schlechterdings nicht.

Ich glaube daher, durch die hier und oben (§. 97. Anm.) beygebrachten Erläuterungen vielmehr zu folgendem Urtheile berechtigt zu seyn:
„Es wäre doch einmal Zeit, dafs Verfasser von
„Anfangsgründen, aus verunglückten Versuchen,
„die ins Hundert gehen, einsehen lernten, bey
„allen diesen Versuchen müsse irgend ein ge-
„meinschaftlicher Fehler zum Grunde liegen, aus
„welchem man sich den Erfolg, dafs sie sämt-
„lich verunglückt seyen, zu erklären habe, und
„dieser Fehler könne kein anderer seyn, als die
„fälschlich angenommene Priorität des 11ten
„Axioms vor dem Satze von der Gleichheit der
„inneren Winkel des Dreyecks mit der Summe

„von zwey rechten, also einsehen lernten, Eu-
 „klid's Grundsatz lasse sich zwar streng bewei-
 „sen, aber nicht, wie man bisher immer thun
 „wollte, ohne jenen Satz zuerst streng, und von
 „ihm ganz unabhängig, bewiesen zu haben.

A u f g a b e 13.

§. 108. Aus einer gegebenen Seite und zwey Winkeln, die zusammen kleiner, als zwey rechte sind, ein Dreyeck zu verzeichnen, worin die gegebenen Winkel an der gegebenen Seite liegen.

Gegeben.	Fig.	Gesucht.
1) Die gerade Linie A (Fig. 20.) als Seite	20. 21. 35.	Die Construction eines Δ L M N, worin $M N = A$,
2) D C E und C D E, als Winkel, die an dieser Seite liegen sollen. (F. 21.)		$L M N = C D E$ und $L N M = D C E$ (F. 35.).

A u f l ö s u n g.

- 1) Mache $M N = A$ (§. 65.).
- 2) An den Punkt M seze $L M N = C D E$, an den Punkt N hingegen $L N M = D C E$ (§. 85.).

3) Verlängere, wenn es nöthig ist, die Schenkel ML , NL , bis sie einander schneiden, so ist MLN das verlangte Dreyeck.

B e w e i s .

1) Da (p. constr.) $LMN = CDE$, und $LN M = DCE$, aber (p. hyp.) $CDE + DCE < 2R$, so ist auch $LMN + LN M < 2R$, folglich treffen ML , NL , weit genug verlängert, an dieser Seite zusammen (§. 107.), und es entsteht also ein Dreyeck.

2) Da (p. constr.) $MN = H$, $LMN = CDE$, $LN M = DCE$, so ist $\triangle MLN$ dasjenige, welches allen Bedingungen der Aufgabe Genüge thut, also das verlangte.

A u f g a b e 14.

§. 109. Aus einer gegebenen Seite und zwey Winkeln, die zusammen kleiner, als zwey rechte sind, ein Dreyeck zu verzeichnen, worin einer der gegebenen Winkel an der gegebenen Seite, der andere aber ihr gegenüber liege.

Gegeben.	Fig.	Gesucht.
1) Die gerade Linie A B als Seite.	36	Die Construction eines $\triangle M K L$, worin $K L = A B$, $L K M = D$, und $K M L =$
2) D, als Winkel, welcher an dieser Seite —		C sey.
3) C, als Winkel, welcher ihr gegen- über liegen soll.		

A u f l ö s u n g.

1) Ziehe eine gerade Linie E F, und nimm in dieser nach Willkühr einen Punkt G an.

2) An den Punkt G seze $F G H = D$, $H G I = C$, so ist $E G I = 2 R - (C + D)$ (§. 75. Z. 3.); also der dritte Winkel des verlangten Dreyecks (§. 97. Z. 2.).

3) Ziehe eine neue gerade Linie K L, und mache $K L = A B$.

4) An den Punkt K seze $M K L = H G F$, an den Punkt L hingegen $K L M = E G I$ (§. 85.).

5) Verlängere, wenn es nöthig ist, die Schenkel K M, L M, bis sie einander

schneiden, so ist $M K L$ das verlangte Dreyeck.

B e w e i s.

1) Da (p. hyp.) $C \perp D \leq 2 R$, und (p. constr.) $2 R - (C \perp D) = E G I$; so ist $C \perp D \perp E G I = 2 R$. (§. 28.), und mithin $D \perp E G I \leq 2 R$.

2) Nun ist (p. constr.) $M K L = H G F = D$, $K L M = E G I$, folglich auch $M K L \perp K L M \leq 2 R$, und mithin treffen $K M$, $L M$, weit genug verlängert, an dieser Seite zusammen (§. 107.), wo also ein Dreyeck entstehen muß.

3) Da nun (p. constr.) $K L = A B$, $M K L = D$, und $K L M = 2 R - (C \perp D)$, folglich $K M L = 2 R - (D \perp K L M) = C$ ist (§. 97. Z. 2.); so ist $\triangle M K L$ dasjenige, welches allen Bedingungen der Aufgabe Genüge thut, also das verlangte.

L e h r s a z 27.

§. 110. Wenn zwey parallele Linien von einer dritten geschnitten werden, so macht

diese den äusseren Winkel seinem inneren, an der nämlichen Seite liegenden Gegenwinkel gleich, die Wechselwinkel einander gleich, und die beyden inneren, an einerley Seite liegenden Winkel zwey rechten gleich.

Hypoth.

Fig.

Saz.

A B $\nparallel$ C D.

34. b.

1) E G B = G H D.

2) A G H = G H D.

3) B G H + G H D

= 2 R.

B e w e i s.

I. T h e i l.

Wäre unter der Voraussetzung, daß A B $\nparallel$ C D, nicht E G B = G H D, so müßte einer dieser beyden Winkel grösser, als der andere, seyn. Es sey also

1) E G B $\triangleright$ G H D, so ist auch E G B + B G H $\triangleright$ B G H + G H D (§. 31.). Aber E G B + B G H = 2 R. (§. 75.); folglich B G H + G H D $\triangleleft$ 2 R.

(§. 34.), und mithin treffen $A B$, $C D$, weit genug verlängert, an der Seite B , D zusammen (§. 107.). Aber (p. hyp.) ist $A B \nparallel C D$; folglich trifft $A B$ mit $C D$ an keiner Seite zusammen, so weit man auch beyde verlängern mag (§. 100.). Da nun dieses ungereimt ist, so kann nicht $E G B \supset G H D$ seyn.

Eben so kann aber gezeigt werden, daß auch nicht $E G B \triangleleft G H D$ sey. Denn es sey

2) $E G B \triangleleft G H D$, so ist auch $E G B + B G H \triangleleft B G H + G H D$ (§. 31.).

Aber $E G B + B G H = 2 R$ (§. 75.);

folglich $B G H + G H D \supset 2 R$.

Nun ist $B G H + A G H = 2 R$ (§. 75.); folglich
und $G H D + G H C = 2 R$. lich

$B G H + A G H + G H D + G H C = 4 R$ (§. 28.). Da aber (p. dem.)

$B G H + G H D \supset 2 R$, so ist

$A G H + G H C \triangleleft 2 R$ (§. 33.); und mithin treffen $A B$, $C D$, weit genug verlängert, an der Seite A , C zusammen. Da aber (p. hyp.) $A B \nparallel C D$, so trifft $A B$

mit $C D$ an keiner Seite zusammen (§. 100.). Dies ist abermal ungereimt; folglich kann auch nicht $E G B < G H D$ seyn. Kann aber (p. dem. 1. 2.) weder $E G B > G H D$, noch $E G B < G H D$ seyn, so muß $E G B = G H D$ seyn (§. 22.). Demnach ist, wenn $A B \nparallel C D$, $E G B = G H D$.

II. T h e i l.

Wenn $A B \nparallel C D$, so ist p. dem. (I. Th.) $E G B = G H D$. Nun ist $E G B = A G H$ (§. 77.); folglich auch $A G H = G H D$ (§. 25.).

III. T h e i l.

Wenn $A B \nparallel C D$, so ist p. dem. (I. Thl.) $E G B = G H D$, folglich $E G B + B G H = B G H + G H D$ (§. 28.); aber $E G B + B G H = 2 R$ (§. 75.), folglich auch $B G H + G H D = 2 R$.

Zus. 1. Eine gerade Linie ($G K$, 33 F.) welche auf der einen ($C D$) von zwey Parallelen lothrecht ist, ist allemal auch auf der andern lothrecht.

Denn da (p. hyp.) $A B \nparallel C D$, so ist (Lehrs. 27.) $B G K + G K D = 2 R$. Aber (p. hyp.) ist $G K D = R$, folglich auch $B G K = R$.

Zus. 2. Durch einerley Punkt (G, 34 F.) ausserhalb einer geraden Linie (C D) kann mit dieser Linie nicht mehr, als eine Parallele (A B) gezogen werden. Denn gesetzt, es wäre durch den Punkt G, ausser der A B, auch die K L mit der C D parallel gezogen; so wäre (Lehrs. 27.) sowohl $B G H + G H D = 2 R$, als $L G H + G H D = 2 R$; folglich $B G H + G H D = L G H + G H D$ (§. 25.), und mithin $B G H = L G H$ (§. 29.) wider (§. 24.); welches unmöglich ist.

Zus. 3. Eine gerade Linie (K L, 34 F.), welche die eine (A B) von zwey Parallelen schneidet, muß, verlängert, auch die andere schneiden.

Denn wenn $A B \nparallel C D$, und K L die A B in G schneidet, so gingen, wofern die K L verlängert nicht auch die C D schneiden müßte, durch einerley Punkt G zwey gerade Linien A B, K L mit der C D parallel, wider (Zus. 2.), welches unmöglich ist.

Zus. 4. Zwey Lothe F D, G E (F. 64.) auf zwey zusammenlaufende gerade Linien A B, B C laufen auch zusammen.

Denn, es ist entweder $A B C = R$, oder nicht $A B C = R$. In jenem Falle ist, da (p. hyp.) auch $F D B = R$, $F D \nparallel B C$ (§. 102. Zus.). Da nun (p. hyp.) die B C von der G E geschnitten wird, so muß dieselbe G E auch

die $F D$ schneiden (Zus. 3.). In diesem Falle hingegen muß die $B C$, wenn sie an der Seite des spizen Winkels, hier $D B E$ oder $A B C$ verlängert wird, mit der gleichfalls verlängerten $D F$ zusammentreffen (§. 107.) und zwar unter einem spizen Winkel (§. 80. Z. 4.), weil $F D B = R$. Ist der Punkt des Zusammenstossens I , so werden, weil (p. hyp.) $G E C = R$, die zwey geraden Linien $G E$, $D F I$ von der dritten $E C I$ unter Winkeln, die zusammen $< 2 R$ sind, geschnitten, folglich müssen sie an eben der Seite, wo diese Winkel liegen, zusammentreffen (§. 107.).

L e h r s a z. 28.

§. 111. Parallele Linien sind in allen Punkten gleich weit von einander entfernt (*aequidistantes*).

Hypoth.	Fig.	Saz.
$A B \# C D.$	37.	$E F = G H.$

V o r b e r e i t u n g.

Wenn $E F$ die Entfernung des Punkts E der Linie $A B$ von der $C D$, und G irgend ein anderer Punkt der Linie $A B$ ist; so fälle von G nach $C D$ das Loth $G H$, und ziehe die $E H$.

B e w e i s.

1) Da (p. hyp.) $AB \nparallel CD$, so ist (§. 110.)
 $GEH = EHF$.

2) Da (p. constr.) die beyden EF , GH auf der dritten CD lothrecht sind, so ist $EF \nparallel GH$ (§. 102. Z.) und mithin $FEH = EHG$ (§. 110.).

3) Da nun auch $EH = EH$, so ist $\triangle EFH \cong \triangle EGH$ (§. 79.), und mithin $EF = GH$.

4) Da nun der Punkt G der Linie AB ganz willkürlich genommen wurde, und die Gleichheit der Entfernung von der Linie CD mit jener des Punkts E für jeden andern Punkt der Linie AB eben so, wie für den G gezeigt werden kann; so muß die Linie AB in allen Punkten eine gleiche Entfernung von der CD haben.

Zus. 1. Wenn zwey Entfernungen (EF , GH) einer geraden Linie (AB) von einer andern (CD), die mit ihr in einerley Ebene liegt, einander gleich sind, so sind auch alle übrigen einander gleich. Denn da (p. hyp.) EF , GH Entfernungen der Punkte E , G von der Linie CD sind, so sind die beyden EF , GH auf der CD lothrecht (§. 89. Z. 1.); folglich

$E F \nparallel G H$ (§. 102. Z.) und mithin $F E H = E H G$ (§. 110.). Nun ist auch $E H = E H$, und (p. hyp.) $E F = G H$, folglich $\triangle E F H \stackrel{S}{=} \triangle E G H$ (§. 66.); also auch $G E H = E H F$. Nun ist (p. dem.) $F E H = E H G$; folglich auch

$$\left. \begin{array}{l} G E H + F E H \\ F E G \end{array} \right) = \left. \begin{array}{l} E H F + E H G \\ F H G \end{array} \right) \quad (\S. 28.)$$

Nun ist (p. dem.) $F H G = R$, folglich auch $F E G = R$. Aber (p. dem.) ist auch $E F H = R$, folglich $G E F + E F H = 2 R$, und mithin $A B \nparallel C D$ (§. 102.). Also $A B$ und $C D$ in allen Punkten gleich weit entfernt (Lehrs. 28.).

Zus. 2. Wenn daher auf einer geraden Linie ($C D$) zwey gleiche Lothe ($E F$, $G H$) aufgestellt, und deren Endpunkte (E , G) durch eine gerade Linie ($E G$) verbunden werden, so ist auch jeder Winkel (E , G), welche die Verbindungslinie mit ihnen macht, ein rechter (Zus. 1.).

Zus. 3. Wenn die Entfernungen zweyer Punkte (G , L , 34. F.) einer geraden Linie ($K L$) von einer andern ($C D$) ungleich sind, so sind auch alle übrigen Entfernungen beyder ungleich.

Denn fände sich unter den Entfernungen aller übrigen Punkte der ersten von der zweyten nur eine einzige, welche einer von den ungleichen Entfernungen der Punkte G , L oder über-

haupt irgend einer andern, gleich wäre, so hätten die beyden geraden Linien zwey gleiche Entfernungen, und folglich wären auch alle übrigen Entfernungen beyder einander gleich (Zus. 1.).

Zus. 4. Alle Punkte (E, F, G), welche von einer geraden Linie (C D) gleich weit abstehen, liegen in einer geraden Linie (F. 38.).

Denn, zieht man durch zwey derselben E, F eine gerade Linie A B, so muß diese, da E I, F K, G L auf der C D lothrecht (§. 89. Z. 1.), folglich einander parallel sind, auch die G L oder deren Verlängerung schneiden (§. 110. Z. 3.). Dies geschieht nun entweder in dem Punkte G oder in einem andern H. In jenem Falle ist der Saz klar, in diesem hätte man $H L = F K = G L$ wider (§. 24.), welches unmöglich ist.

L e h r s a z 29.

§. 112. Gerade Linien, die einer dritten parallel sind, sind einander selbst parallel.

Hypoth.

Fig.

Saz.

$\begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix} \Bigg) \# E F$

39.

$A B \# C D.$

V o r b e r e i t u n g.

Ziehe die Linie G H K.

B e w e i s.

1) Da (p. hyp.) $A B \# E F$, so ist $A G H = G H F$ (§. 110.).

2) Da (p. hyp.) $C D \parallel E F$, so ist $G H F = G K D$.

3) Nun ist (p. dem. 1.) $G H F = A G H$, folglich auch $A G H = G K D$ (§. 25.) und mithin $A B \parallel C D$ (§. 102.).

L e h r s a z 30.

§. 113. Wenn zwey gerade Linien von einer dritten so geschnitten werden, daß die beyden inneren, an einerley Seite der schneidenden Linie liegenden Winkel zusammen grösser, als zwey rechte sind; so laufen die beyden geraden Linien an eben der Seite auseinander, und umgekehrt: Wenn zwey auseinanderlaufende gerade Linien von einer dritten geschnitten werden; so macht diese die beyden inneren an einerley Seite liegenden Winkel zusammen grösser, als zwey rechte.

I. T h e i l.

Hypoth.	Fig.	Satz.
$K G H + G H C > 2 R.$	34.	$C D, K L$ laufen an der Seite C, K auseinander.

B e w e i s.

Wenn $C D$, $K L$ an der Seite C , K nicht auseinander liefen, so liefen sie entweder an dieser Seite zusammen, oder sie wären parallel. In jenem Falle hätte man $K G H + G H C < 2 R$. (§. 80. Z. 1.); in diesem hingegen $K G H + G H C = 2 R$ (§. 110); wovon das eine wie das andere unmöglich ist, weil es der Voraussetzung $K G H + G H C > 2 R$ widerspricht. Folglich müssen $C D$, $K L$ an der Seite C , K auseinander laufen.

II. T h e i l.

Hypoth.

Saz.

$C D$, $K L$ laufen
an der Seite C , K
auseinander.

$K G H + G H C$
 $> 2 R$.

B e w e i s.

Wäre nicht $K G H + G H C > 2 R$, so wäre entweder $K G H + G H C < 2 R$, oder $K G H + G H C = 2 R$. In jenem Falle liefen $C D$, $K L$ an der Seite C , K zusammen (§. 107.); in diesem hingegen wä-

ren sie parallel (§. 102.). Beydes ist aber unmöglich, weil es der Voraussetzung, daß CD, KL an der Seite C, K auseinanderlaufen, zuwider ist. Folglich muß $\angle KGH + \angle GHC > 2R$ seyn.

L e h r s a z 31.

§. 114. Wenn die Schenkel zweyer Winkel von den Scheitelpunkten aus nach einerley Seite zu mit einander parallel laufen; so sind die beyden Winkel einander gleich.

Hypoth.	Fig.	Satz.
1) $AB \parallel DE$	40	$BAC = DEF.$
2) $AC \parallel EF$		

V o r b e r e i t u n g.

Verlängere den Schenkel DE , bis er den AC in G schneidet.

B e w e i s.

1) Da (p. hyp.) $EF \parallel AC$, so ist $\angle DEF = \angle DGC$ (§. 110.).

2) Da (p. hyp. et constr.) $DG \parallel AB$, so ist $\angle DGC = \angle BAC$ (p. e. r.), folglich auch $BAC = DEF$ (§. 25.).

L e h r s a z 32.

§. 115. Gerade Linien, welche die Endpunkte zweyer gleichen und parallelen Linien an einerley Seite verbinden, sind selbst gleich und parallel.

Hypoth.

Fig.

Saz.

$A B \left(\begin{array}{c} \text{=} \\ \# \end{array} \right) C D.$ 41. $A C \left(\begin{array}{c} \text{=} \\ \# \end{array} \right) B D.$

V o r b e r e i t u n g.

Ziehe die Linie B C.

B e w e i s.

1) Da (p. hyp.) $A B \# C D$, so ist $A B C = B C D$ (§. 110).

2) Da (p. hyp.) $A B = C D$, auch $B C = B C$; so ist $\triangle A B C \stackrel{S}{=} \triangle B C D$ (§. 66.), und mithin $A C = B D$, auch $A C B = C B D$, folglich auch $A C \# B D$, (§. 102.).

Zus. Gerade Linien (C E, B D. 41. F.), welche die Endpunkte zweyer ungleichen Parallelen (E B, C D) an einerley Seite verbinden, treffen, über die kleinere (E B) dieser Parallelen hinaus weit genug verlängert, zusammen.

Denn, wird BE verlängert, bis $AB = CD$,
 alsdann AC , gezogen, so ist $CAB +$
 $ABD = 2R$ (Lehrs. 32. und §. 110.). Nun ist
 $CEB > CAB$ (§. 78.), folglich $CEB +$
 $ABD > 2R$; demnach laufen EC , BD ver-
 längert nach C , D hin auseinander (§. 113.), al-
 so nach der entgegengesetzten Seite zusammen
 (§. 100.).

Erklärung 40.

§. 116. Eine ebene geradlinige Figur
 ($ABDC$ 41. F.) von vier Seiten heißt ein
Viereck (*quadrilaterum s. tetragonum*).
 Sind jede zwey gegenüberliegende Seiten
 des Vierecks (AB mit CD und AC mit
 BD) parallel, so heißt es ein **Parallelo-**
gramm (*Parallelogrammum*). Sind hingegen
 nur zwey gegenüberliegende Seiten (EB ,
 CD) parallel, so heißt es ein **Trapezium**
 (*Trapezium*), und die Seiten zwischen den
 Parallelen heißen seine **Zwischenseiten**.
 Ist endlich gar keine Seite der andern par-
 allel (wie in $ABFE$, 31. F.), so heißt das
 Viereck ein **Trapezoid** (*trapezoides*). Ein
 Loth von einer Parallele zur andern heißt
 die **Höhe** des Parallelogramms und des Tra-
 peziums.

Zus. 1. Jede Diagonale theilt das Viereck in zwey Dreyecke (§. 58).

Zus. 2. Daher betragen in jedem Vierecke die vier inneren Winkel zusammen vier rechte. (§. 97.).

Zus. 3. Ein Viereck, das zwey gleiche parallele Seiten hat, ist ein Parallelogramm, weil alsdann auch die beyden andern Seiten parallel sind (§. 115.), woraus also die Möglichkeit der Parallelogramme erhellet.

Zus. 4. Ein Viereck (A D, 41. F.) das zwey parallele Seiten (A B, C D) und zwey gleiche Gegenwinkel (A, D) hat, ist ein Parallelogramm. Denn da (p. hyp.) $A B \nparallel C D$, so ist $A B C = B C D$ (§. 110.); und da (p. hyp.) $B A C = B D C$, so ist auch $A C B = C B D$ (§. 97. Z. 3.): also $A C \nparallel B D$ (§. 102.).

Zus. 5. Im Parallelogramme liegt jede Seite an zwey Winkeln, die zusammen zwey rechten gleich sind (§. 110.), und: wenn in einem Vierecke jede Seite an zwey Winkeln liegt, die zusammen zwey rechten gleich sind, so ist es ein Parallelogramm (§. 102.).

Zus. 6. Wenn daher ein Parallelogramm einen rechten Winkel hat, so hat es lauter rechte; und wenn es einen schiefen hat, so hat es lauter schiefe Winkel (Z. 4.). Demnach hat jedes Parallelogramm entweder lauter rechte, oder lauter schiefe Winkel.

Zus. 7. Im Trapezion (E B D C, 41. F.) sind die Winkel an jeder Zwischenseite zusammen zwey rechten gleich (§. 110.).

Zus. 8. Wenn daher der eine Winkel an der Zwischenseite des Trapezions ein rechter ist, so ist auch der andere ein rechter; ist hingegen der eine spiz, so ist der andere stumpf, und umgekehrt (Z. 6.).

L e h r s a z 33.

§. 117. Im Parallelogramme sind die Gegenseiten und Gegenwinkel einander gleich.

Hypoth.	Fig.	Saz.
A D ist ein Parallelogramm.	41.	1) $AB = CD$
		2) $AC = BD$
		3) $A = D$
		4) $ACD = ABD$.

V o r b e r e i t u n g.

Ziehe die Diagonale B C.

B e w e i s.

1) Da (p. hyp.) $AB \parallel CD$, so ist $ABC = BCD$ (§. 110.).

2) Da (p. hyp.) $AC \parallel BD$, so ist $ABC = CBD$ (e. a. O.).

3) Nun ist auch $B C = B C$, folglich

$\triangle A B C \cong \triangle B C D$ (§. 79.), u. mithin

$A B = C D$, $A C = B D$, $A = D$.

4) Da (p. dem.-1. 2.) $B C D = A B C$,

und $A C B = C B D$,

so ist auch

$$\left(\begin{array}{c} A C B + \\ B C D A C D \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} A B C + C B D A B D \\ (\S. 28.). \end{array} \right)$$

Zus. Die Diagonale ($B C$) theilt also das Parallelogramm ($A D$) in zwey congruente Drey-ecke (§. 69.).

L e h r s a z 34.

§. 118. Wenn in einem Vierecke jede zwey entgegengesetzte Seiten oder Winkel gleich sind, so ist es ein Parallelogramm.

Hypoth.	Fig.	Satz.
1) $A C = B D$, $A B = C D$.	41.	$A D$ ist ein Parallelogramm.
2) $A = D$ $A C D = A B D$.		

Vorbereitung.

Ziehe die Diagonale $B C$.

B e w e i s.

I. T h e i l.

Da (p. hyp.) $AC = BD$, und $AB = CD$, so ist $ACB = CBD$ und $ABC = DCB$ (§. 69.), folglich $AC \parallel BD$ und $AB \parallel CD$ (§. 102.), und mithin AD ein Parallelogramm (§. 116.).

II. T h e i l.

Da (p. hyp.) $A = D$ und $ACD = ABD$, so ist $A + D + ACD + ABD = 2A + 2ACD$. Nun ist $A + D + ACD + ABD = 4R$ (§. 97.), folglich $2A + 2ACD = 4R$, und mithin $A + ACD = 2R$ (§. 27.). Da nun (p. hyp.) $ACD = ABD$, so ist auch $A + ABD = 2R$; folglich $AB \parallel CD$, und $AC \parallel BD$ (§. 102.) und mithin AD ein Parallelogramm (§. 116.).

L e h r s a z 35.

§. 119. Die Diagonalen eines Parallelogramms halbiren einander, und theilen das Parallelogramm in vier Dreyecke, von

welchen jede zwey gegenüberliegende congruent sind.

Hypoth.	Fig.	Saz.
1) A B D C ist ein Parallelogramm.	42.	1) $A E = E D B E$ $= E C$
2) A D, B C sind seine Diagonalen.		2) $\triangle A E B \stackrel{S}{=} \triangle C E D$ $\triangle A C E \stackrel{S}{=} \triangle B D E$

B e w e i s.

1) Da $C D = A B$, (§. 117.) $B C D = A B C$, $C D A = B A D$ (§. 110.), so ist $C E = E B$, $A E = E D$, und $\triangle A E B \stackrel{S}{=} \triangle C E D$ (§. 79.).

2) Da auch $A C = B D$ (§. 117.), so ist auch $\triangle A C E \stackrel{S}{=} \triangle B D E$ (§. 69.).

Z u s. Demnach geht die gerade Linie (D E) aus einer Winkelspize (D) nach der Mitte (E) der Diagonale (B C) auch durch die gegenüberliegende Winkelspize (A), und ist selbst eine Diagonale. Denn D A halbirt die B C in E (Lehrs. 35.). Ginge also D E nicht durch A, so wären von D nach E zwey gerade Linien möglich wider (§. 44.), welches ungereimt ist.

L e h r s a z 36.

§. 120. Ein Viereck, dessen Diagonalen einander halbiren, ist ein Parallelogramm.

Hypoth.	Fig.	Saz.
1) A B D C ist ein Viereck.	42.	A B D C ist ein Parallelogramm.
2) A D, B C sind seine Diagonalen.		
3) Es ist $A E = E D$ und $B E = E C$.		

B e w e i s.

Da (p. hyp.) $A E = E D$, und $B E = E C$, auch $A E B = C E D$, und $A E C = B E D$ (§. 77.), so ist $A B = C D$, und $A C = B D$ (§. 66.); folglich A B D C ein Parallelogramm (§. 118.).

L e h r s a z 37.

§. 121. Jede gerade Linie, die durch die Mitte der Diagonale eines Parallelogramms geht, theilt dasselbe in zwey congruente Theile.

Hypoth.	Fig.	Saz.
1) A B D C ist ein Parallelo-	43.	$A C H G \cong B G H D$.

gramm, und B C

desen Diagonale.

2) H G geht durch

die Mitte E der B C.

B e w e i s.

1) Da $C E = E B$ (p. hyp.), $E C H = E B G$ (§. 110.) und $C E H = B E G$ (§. 77.), so ist $C H = B G$ (§. 79.), $E H C = E G B$ und $E H D = A G E$.

2) Da $C H + H D = A G + G B$ (§. 117.), aber (p. dem. 1.) $C H = B G$, so ist auch $D H = A G$.

3) Da nun ferner $A C = B D$, $A = D$, und $B = C$ (§. 117.); so sind in den beyden Figuren A C H G, B G H D alle Seiten und Winkel einander stückweise gleich, folglich ist $A C H G \cong B G H D$. (§. 20.).

A u f g a b e 15.

§. 122. Durch einen gegebenen Punkt im Umfange des Parallelogramms oder innerhalb oder ausserhalb desselben eine Linie so zu legen, daß sie daselbe in zwey congruente Theile zerlege.

Gegeben.	Fig.	Gesucht.
1) Ein Parallelogramm A B D C.	43.	Eine gerade Linie durch H, F oder
2) Ein Punkt H, F oder K.		K, welche das Parallelogramm halbire.

Auflösung und Beweis.

- 1) Ziehe die Diagonalen A D, B C, so halbiren diese einander in E (§. 119.).
- 2) Ziehe aus E nach dem gegebenen Punkte eine gerade Linie und verlängere sie bis an den Umfang des Parallelogramms. Geht nun diese durch eine Winkelspize, so ist sie eine Diagonale (§. 119. Z.) und theilt also das Parallelogramm in zwey congruente Dreyecke (§. 117. Z.). Geht sie aber nicht durch eine Winkelspize, so theilt sie dasselbe in zwey congruente Trapezien (§. 121.).

E r k l ä r u n g 41.

§. 123. Ein Parallelogramm heisst rechtwinkelig (*rectangulum*), wenn es lauter rechte; schiefwinkelig (*obliquangulum*), wenn es lauter schiefe Winkel hat.

Zus. 1. Also ist ein Parallelogramm, das einen rechten Winkel hat, rechtwinkelig; ein solches hingegen, das einen schiefen Winkel hat, schiefwinkelig (§. 116. Z. 5.).

Zus. 2. Wenn man im rechtwinkeligen Parallelogramme die eine Seite für die Grundlinie annimmt, so ist die an ihr liegende die Höhe (§. 116.).

Zus. 3. Im rechtwinkeligen Parallelogramme sind alle vier Winkel gleich (§. 74.), und ein Viereck, das lauter gleiche Winkel hat, ist ein rechtwinkeliges Parallelogramm (§. 118. 116. Z. 2.).

Zus. 4. Demnach sind im schiefwinkeligen Parallelogramme nur die entgegengesetzten Winkel gleich (§. 117.); folglich zwey derselben spiz und die beyden andern stumpf (§. 116. Z. 2.).

Zus. 5. Im rechtwinkeligen Parallelogramme (Fig. 44.) sind die beyden Diagonalen A D, B C gleich, und theilen einander in vier gleiche Theile. Denn in den Dreyecken B A C, A B D ist $B C = A D$ (§. 66.), folglich $\frac{1}{2} B C = \frac{1}{2} A D$, also $A E = E D = B E = E C$ (§. 119.).

E r k l ä r u n g 42.

§. 124. Ein rechtwinkeliges Parallelogramm heisst ein Quadrat (*quadratum*), wenn alle vier Seiten desselben gleich sind;

ein längliches Viereck oder Rechteck (*rectangulum oblongum*), wenn nur die gegenüberliegenden Seiten einander gleich sind.

Ein schiefwinkeliges Parallelogramm heißt eine Raute (*rhombus*), wenn es lauter gleiche Seiten hat, eine längliche Raute (*rhomboides*), wenn es nur gleiche Gegenseiten hat.

Ein Quadrat (Fig. 45.), dessen Seite AB ist, nennt man das Quadrat der Seite AB , und bezeichnet es durch AB^2 , oder auch wohl durch $\overline{AB}^2$. Ein Rechteck (Fig. 44.), dessen Seiten AB , AC sind, nennt man das Rechteck aus den Seiten AB , AC , oder auch das Rechteck der Seiten AB , AC , und bezeichnet es durch $AB \times AC$, oder durch $AB. AC$.

Zus. 1. Ein Quadrat hat lauter gleiche Seiten und lauter gleiche Winkel (§. 123. Z. 3.), und ist also eine regelmässige Figur (§. 58.).

Zus. 2. Im Rechtecke sind alle Winkel einander gleich (§. 123. Z. 3.); im Rhombus und Rhomboides aber nur die Gegenwinkel, und von diesen sind zwey spiz und die beyden andern stumpf (§. 123. Z. 4.).

Zus. 3. Im Quadrate und Rechtecke sind die Diagonalen gleich, und schneiden sich in vier gleiche Theile (§. 123. Z. 5.).

Zus. 4. Die Diagonalen AD , BC (F. 45.) theilen das Quadrat in vier congruente Drey-ecke (§. 69.), und schneiden sich daher in E lothrecht (§. 57.).

Zus. 5. Quadrate von gleichen Seiten sind congruent (§. 20.). Demnach ist das Quadrat durch eine Seite gegeben (§. 19.).

Zus. 6. Rechtecke, in welchen zwey gleichliegende (gleichnamige) Seiten gleich sind, sind congruent (§. 117. 20.). Demnach ist das Rechteck ($ABDC$ 44. F.) durch seine beyde Seiten (AB , AC) gegeben (§. 19.).

Zus. 7. Rhombi, in welchen eine Seite und ein Winkel gleich sind, sind congruent (§. 117. 20.). Demnach ist der Rhombus (AD , 46 F.) durch die Seite AB und den Winkel A gegeben (§. 19.).

Zus. 8. Rhomboiden, in welchen zwey Seiten sammt dem eingeschlossenen Winkel gleich sind, sind congruent (§. 117. 20.). Demnach ist das Rhomboid ($ABDC$, 42. F.) durch die Seiten AB , AC . und den Winkel BAC gegeben (§. 19.).

A u f g a b e 16.

§. 125. Aus zwey ungleichen Seiten ein Rechteck zu beschreiben.

Gegeben.	Fig.	Gesucht.
A B, A C	44.	das Rechteck aus A B und A C.

A u f l ö s u n g u n d B e w e i s.

1) Auf A B errichte in dem Punkte A ein Loth (§. 72.), und mache dieses der zweyten Seite A C gleich (§. 65.)

2) Ziehe B C.

3) Auf B C beschreibe das Dreyeck B D C, so, daß $C D = A B$, und $B D = A C$ sey (§. 84.); so ist A D ein Parallelogramm (§. 118.), und zwar ein rechtwinkeliges (§. 123. Z. 1.): also das verlangte Rechteck (§. 124.).

Z u s. Soll auf A B das Quadrat dieser Linie (Fig. 45.) beschrieben werden, so ist eben so zu verfahren, mit dem einzigen Unterschiede, daß alsdann $A C = A B$ gemacht werden muß.

A u f g a b e 17.

§. 126. Aus zwey ungleichen Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen schiefen Winkel ein Rhomboid zu beschreiben.

Gegeben.	Fig.	Gesucht.
AB, AC, BAC	42.	das Rhomboid, das AB, AC zu Seiten und BAC zum spi- zen Winkel hat.

Auflösung und Beweis.

1) An den Punkt A der Linie AB seze den gegebenen Winkel BAC (§. 85.).

2) Mache AC der zweyten gegebenen Seite gleich.

3) Ziehe BC .

4) Auf der BC beschreibe das Dreyeck $BD C$, so, dafs $CD = AB$, $BD = AC$ sey (§. 84.); so ist AD ein Parallelogramm (§. 118.), und zwar ein schiefwinkeliges (§. 123. Z. 1.): also das verlangte Rhomboid (§. 124.).

Zus. Soll auf der Seite AB ein Rhombus mit dem schiefen Winkel BAC (F. 46.) beschrieben werden, so muß $AC = AB$ gemacht, übrigens aber eben so verfahren werden.

Lehrsatz. 38.

§. 127. Eine grössere Seite hat auch ein grösseres Quadrat.

Hypoth.	Fig.	Satz
$A B \triangleright F M.$	45.	$\overline{A B}^q \triangleright \overline{F M}^q$

Vorbereitung.

1) Verlängere $F M$, bis $F K = A B$ wird.

2) Beschreibe auf $A B$ das Quadrat $A D$, auf $F M$ das Quadrat $F N$ und auf $F K$ das Quadrat $F H$ (§. 125. Z.).

Beweis.

1) Da $F K = A B$ (p. constr.), so ist $\overline{F K}^q = \overline{A B}^q$ (§. 124. Z. 5.). Aber $\overline{F K}^q = \overline{F H}^q$, und $\overline{A B}^q = \overline{A D}^q$ (p. constr.); folglich ist $F H = A D$.

2) Es ist aber $F H \triangleright F N$ (§. 24.); also auch $A D \triangleright F N$, (§. 35.), d. i. $\overline{A B}^q \triangleright \overline{F M}^q$.

Zus. 1. Daher haben gleiche Quadrate auch gleiche Seiten; d. i. wenn $\overline{A B}^q = \overline{F M}^q$, so ist $A B = F M$. Denn wäre die eine dieser Seiten grösser als die andere, so wäre auch das Quadrat von jener grösser, als das Quadrat von dieser (Lehrs. 38.), gegen die Voraussetzung.

Z u s. 2. Demnach sind gleiche Quadrate congruent (§. 124. Z. 5.).

Z u s. 3. Ein grösseres Quadrat hat auch eine grössere Seite, d. i. wenn $\overline{A B}^q > \overline{F M}^q$ so ist $A B > F M$. Denn wäre nicht $A B > F M$, so wäre $A B = F M$, oder $A B < F M$ (§. 22.). In jenem Falle aber wäre $\overline{A B}^q = \overline{F M}^q$ (§. 124. Z. 5.), in diesem hingegen $\overline{A B}^q < \overline{F M}^q$ (Lehrsatz 38.), beydes gegen die Voraussetzung.

L e h r s a z 39.

§. 128. Wenn in einem Trapezion durch die Mitte einer Zwischenseite, mit den parallelen Seiten desselben eine Parallele gezogen wird, so sind die beyden parallelen Seiten zusammen dem Doppelten der Durchschnittsparallele gleich.

Hypoth.	Fig.	Satz.
1) $A B C D$ ist ein Trapezion, und $A B \nparallel C D$.	47.	$A B + C D = 2 E F$.
2) E die Mitte von $A D$.		
3) $E F \nparallel A B$.		

V o r b e r e i t u n g.

Durch E ziehe $G H \nparallel B C$ (§. 103.).

B e w e i s.

1) Da (p. hyp.) $AB \parallel CD$, so ist $GA D = A D H$ und $AG H = G H D$ (§. 110.).

2) Da (p. hyp.) auch $AE = ED$, so ist $\triangle AEG \cong \triangle DEH$, und mithin $AG = DH$ (§. 79.).

3) Nun ist auch $BG = EF = CH$ (§. 117.) $= CD + DH$; folglich

$\left. \begin{array}{l} AG + \\ BG + AB \end{array} \right) = CD + 2DH$ (§. 28.); also auch,
da $+ CD = + CD$

$AB + CD = 2CD + 2DH = 2(CD + DH) = 2CH = 2EF$ (§. 117.).

Zus. Von einer Durchschnittparallele, welche die eine der Zwischenseiten eines Trapezioms halbiert, wird immer auch die andere halbiert (§. 117.).

E r k l ä r u n g. 42. a.

§. 128. a. Eine ebene geradlinige Figur von mehr als vier Seiten, wird zwar auch nach der Zahl ihrer Seiten benannt, und heißt z. B. ein Fünfeck, wenn sie fünf, ein Sechseck, wenn sie sechs, ein n Eck

wenn sie n Seiten hat, im Allgemeinen aber heisst sie ein Vieleck oder Polygon (*polygonum*). Vielecke von gleich vielen Seiten heissen gleichnamige. In regelmässigen Vielecken heisst der Winkel, den zwey Seiten mit einander einschliessen, der Polygonwinkel.

Zus. 1. Wenn man aus einem, innerhalb eines Vielecks angenommenen Punkte nach allen Ecken desselben gerade Linien zieht; so wird das Vieleck dadurch in eben so viele Dreyecke getheilt, als es Seiten hat. Denn über jeder Seite entsteht auf solche Art ein Dreyeck.

Zus. 2. Die Anzahl der Diagonalen, die in einem Vielecke, von einer Ecke aus, möglich sind, ist um drey kleiner, als die Zahl der Seiten desselben; d. h. in jedem n Ecke ist die Zahl der von einer Ecke aus möglichen Diagonalen $= n - 3$.

Denn einmal ist nach der angenommenen Ecke von ihr selbst aus offenbar keine Diagonale möglich. Eben so wenig ist aber zweytens von der angenommenen Ecke aus nach den auf beyden Seiten ihr zunächst anliegenden Ecken eine Diagonale möglich (§. 45. Z. 2.); also gehen von der Zahl aller Ecken eines Vielecks drey ab, nach welchen von einer Ecke aus keine Diagonalen

gezogen werden können. Folglich ist die Zahl aller in einem Vielecke von einer Ecke aus möglichen Diagonalen um drey kleiner, als die Zahl der Ecken, mithin auch um drey kleiner, als die Zahl der Seiten desselben (§. 58. Z. 2.).

Zus. 3. Die Diagonalen, welche in einem Vielecke von einer Ecke aus gezogen werden, theilen das Vieleck in so viele Dreyecke, als es Seiten hat, weniger zwey; d. h. die Zahl der Dreyecke, in welche die von einer Ecke aus gezogenen Diagonalen das n Eck theilen, ist $= n - 2$. Denn die beyden ersten, so wie die beyden letzten Seiten geben nur ein Dreyeck; von den übrigen Seiten aber giebt jede mit den beyden, nach ihren Endpunkten gehenden Diagonalen ein Dreyeck; folglich entstehen in der ganzen Figur zwey Dreyecke weniger, als sie Seiten hat.

Zus. 4. In jedem Vielecke ist die Summe der innern Winkel gleich der Summe von zwey rechten, so vielmals genommen, als das Vieleck Seiten hat, weniger zwey; d. h. die Summe der Winkel im n Eck ist $= (n - 2) \cdot 2 \text{ R.}$

Denn das n Eck wird durch die von einer Ecke aus möglichen Diagonalen in $n - 2$ Dreyecke getheilt (Zus. 3.), in deren jedem die Summe der inneren Winkel $= 2 \text{ R}$ ist (§. 97.). Die Summe der inneren Winkel dieser Dreyecke aber ist mit der Summe der inneren Winkel des n Ecks

einerley; folglich ist die Summe der inneren Winkel des letzteren $\equiv (n - 2) \cdot 2 \text{ R.}$

Zus. 5. Demnach ist im regelmässigen Vielecke von n Seiten, d. h. im regelmässigen n Ecke der Polygonwinkel gleich dem n ten Theile von der Summe der inneren Winkel.

Denn, da hier alle inneren Winkel gleich sind (§. 58.), so ist jeder einzelne der n te Theil von der Summe aller, folglich $\equiv \frac{(n - 2) \cdot 2 \text{ R.}}{n}$ (Zus. 4.)

Zus. 6. Da jeder Winkel im regelmässigen Dreyecke $\equiv \frac{2}{3} \text{ R.}$ (§. 97. Z. 5.), im regelmässigen Vierecke aber $\equiv \text{R.}$; folglich auch in diesen beyden Figuren der Winkel $\equiv \frac{(n - 2) \cdot 2 \text{ R.}}{n}$;

so ist dies der allgemeine Ausdruck für die Grösse des Winkels in allen regelmässigen Figuren.

Zus. 7. Je grösser die Zahl der Seiten einer regelmässigen Figur ist, desto grösser ist der Winkel derselben (Zus. 6.); also ist der kleinste Winkel, den eine regelmässige Figur haben kann, der Winkel des regelmässigen Dreyecks (§. 58. Z. 1.) d. h. $\frac{2}{3} \text{ R.}$

L e h r s a z. 39. a.

§. 128. b. Zwey gleichnamige Vielecke sind congruent, wenn in beyden einander gleich sind

1) alle gleichnamige Seiten, ausser den zwey letzten, und alle gleichnamige Winkel ausser dem von den beyden letzten Seiten eingeschlossenen.

2) Alle gleichnamige Seiten, ausser der letzten, und alle gleichnamige Winkel ausser den beyden, an welchen die letzte Seite liegt.

3) Alle gleichnamige Seiten und Winkel ausser den drey letzten Winkeln.

4) Alle gleichnamige Seiten und alle aus zwey gleichnamigen Ecken mögliche Diagonalen.

B e w e i s.

Im ersten Falle folgt die Congruenz der zwey Dreyecke, zu welchen die zwey letzten Seiten beyder Figuren gehören, aus §. 79, die Congruenz aller übrigen gleichnamigen Dreyecke aber aus §. 66.

Im 2ten Falle folgt die Congruenz aller gleichnamigen Dreyecke in beyden Figuren aus §. 66.

Im 3ten Falle folgt die Congruenz aller gleichnamigen Dreyecke beyder Figuren theils aus §. 66. theils aus §. 69.

Im 4ten Falle folgt die Congruenz aller gleichnamigen Dreyecke beyder Figuren aus §. 69.

In allen vier Fällen sind also beyde Figuren aus lauter congruenten Theilen auf gleiche Art und in einerley Ordnung zusammengesetzt, also nothwendig congruent.

Z u s. 1. Alle gleichnamigen regelmässigen Vielecke, die eine gleiche Seite haben, sind congruent.

Denn ist eine Seite des einen einer Seite des andern gleich; so sind alle Seiten beyder einander gleich (§. 58.): aber auch alle Winkel beyder sind einander gleich (e. a. O.), folglich auch alle gleichnamigen Diagonalen (§. 66), und mithin die ganzen Figuren congruent (p. dem. 4.).

Z u s. 2. Jedes regelmässige Vieleck ist also durch eine Seite und die Zahl der Seiten gegeben.

Denn durch eine Seite sind alle übrigen (§. 58.) und durch die Zahl der Seiten ist der Polygonwinkel (§. 128. a. Z. 5), also jeder innere Winkel der Figur (§. 58.), und mithin die Figur selbst, gegeben.

Z u s. 3. Durch die in den vier Fällen des Lehrsazes 39. a. genannten Stücke ist jedes Vieleck gegeben (§. 19.).

II. Von dem Kreise.

E r k l ä r u n g 43.

§. 129. Eine ebene Figur, die von einer Kreislinie eingeschlossen wird, heißt eine Kreisfläche, oder, der Kürze wegen, auch ein Kreis (§. 61. A. 2.). Der Mittelpunkt, die Halbmeser und Durchmesser der Kreislinie heißen auch Mittelpunkt, Halbmeser und Durchmesser des Kreises. Eben so gelten auch die Benennungen: Halbkreis, Quadrant, Sextant, Octant, womit man die Hälfte, den vierten, sechsten, achten Theil des Kreises bezeichnet, sowohl von der Kreislinie, als von der Kreisfläche.

Zus. 1. Da alle Halbmeser des Kreises gleich sind (§. 59. Z. 1.), so steht sein Mittelpunkt von allen Punkten der Kreislinie gleich weit ab (§. 87. 88. Z.).

Zus. 2. Demnach ist kein Theil der Kreislinie gerade. Denn, da jede Linie ins Unendliche theilbar ist (§. 9. Z. 3.), so giebt es in jedem Theile der Kreislinie zwischen seinen beyden Endpunkten noch einen dritten Punkt (§. 11. Z. 1.). Wäre also irgend ein Theil der Kreisli-

nie gerade, so stände der Mittelpunkt von drey Punkten einer geraden Linie gleich weit ab (Zus. 1.) wider (§. 89. Z. 2.), welches unmöglich ist.

Zus. 3. Also ist die Kreislinie eine krumme Linie (§. 41.), und mithin der Kreis eine krummlinige Figur (§. 58.).

Zus. 4. Die Kreislinie ist also die Peripherie des Kreises (§. 58.).

Zus. 5. Kreise von gleichen Halbmessern oder Durchmessern sind congruent.

Denn gedenkt man sich den einen so über den andern gelegt, daß die Mittelpunkte beyder zusammenfallen, während die ganzen Kreise in einer Ebene liegen; so sind alle Punkte in beyden Kreislinien von den zusammenfallenden Mittelpunkten gleich weit entfernt (Zus. 1.), folglich ist alsdann kein Punkt in der einen Kreislinie ausserhalb der andern (§. 60. Z. 2.): beyde Kreislinien fallen also zusammen und decken sich, mithin auch die von ihnen eingeschlossenen Kreisflächen (§. 20.).

Zus. 6. Demnach ist durch den Halbmesser oder Durchmesser sowohl die Kreislinie, als die Kreisfläche gegeben (Z. 5. §. 19.).

Zus. 7. Ein grösserer Halbmesser oder Durchmesser giebt eine grössere Kreisfläche. Denn, wenn $B C > G K$ (F. 48.) so; sind, wenn man

mit $G F = B C$ die Kreislinie $H E F$ beschreibt, die Kreise $A B D$, $E F H$ congruent (Zus. 5.). Da nun $G F > G K$ ist, so liegt $K L M$ innerhalb $E F H$ (§. 60.); folglich ist $E F H > K L M$ (§. 24.), und mithin auch $A B D > K L M$ (§. 35.).

Zus. 8. Gleiche Kreise haben also gleiche Durchmesser. Denn wäre der Durchmesser des einen größer als der Durchmesser des andern, so wäre auch der eine Kreis größer als der andere (Zus. 7.).

Zus. 9. Gleiche Kreise sind also congruent. (Zus. 5. 8.).

Zus. 10. Ein größerer Kreis hat auch einen größeren Durchmesser und Halbmesser.

Denn, wenn (F. 48.) $A B D > K L M$ ist, so ist weder $B C = G K$ (Zus. 5.), noch $B C < G K$ (Zus. 7.); also $B C > G K$ (§. 22.).

E r k l ä r u n g 44.

§. 130. Jeder Theil der Peripherie des Kreises, wie $A N D$ (F. 48.) heißt ein **Kreisbogen** (*arcus circuli*); die gerade Linie $A D$ von dem einen Endpunkte eines Bogens zum andern heißt die **Sehne** (*chorda*) desselben. Ein Winkel ($B C D$), der den

Mittelpunkt zum Scheitel, und zwey Halbmesser zu Schenkeln hat, heisst ein **Mittelpunktswinkel** (*angulus ad centrum sc. constitutus*). Ein Winkel (B A D), dessen Scheitel in der Peripherie liegt, und dessen Schenkel Sehnen sind, heisst ein **Peripheriewinkel** (*angulus ad peripheriam sc. constitutus*). Jeder Theil der Kreisfläche, der von den Schenkeln eines Mittelpunktswinkels und dem dazwischen liegenden Bogen eingeschlossen wird, wie C B D, heisst ein **Ausschnitt** (*Sector*). Jeder Theil der Kreisfläche hingegen, der von einem Bogen und dessen Sehne eingeschlossen wird, heisst ein **Abschnitt** (*segmentum*), und diese Sehne heisst die **Grundlinie** (*basis*) desselben.

Ein Winkel, der von zwey geraden Linien eingeschlossen wird, welche von einem Punkte der Kreislinie an die Endpunkte der Grundlinie des Abschnitts gehen, heisst der **Winkel im Kreisabschnitte** (*angulus in segmento*); und von einem solchen Winkel sagt man, so wie von dem Mittelpunktswinkel, er **stehe auf dem**

Kreisbogen, den seine Schenkel abschneiden.

Ein Kreisabschnitt, welcher grösser ist als der Halbkreis, heisst der Kürze wegen, der grössere; ein solcher hingegen, welcher kleiner ist als der Halbkreis, der kleinere.

Sind die Winkel in zwey Kreisabschnitten gleich, so heissen die Abschnitte ähnlich.

L e h r s a z 40.

§. 131. Jede Sehne liegt ganz innerhalb und ihre Verlängerung ganz ausserhalb des Kreises.

Hypoth.

Fig. 49. Saz.

1) A B ist eine Sehne des Kreises, der C zum Mittelpunkte hat.

2) A E ist deren Verlängerung.

1) A B liegt ganz innerhalb, 2) A E ganz ausserhalb des $\odot C$.

V o r b e r e i t u n g.

Aus dem Mittelpunkte C ziehe nach A, B die C A, C B, und nach Willkühr, C F diesfeits und C D jenseits der C A.

B e w e i s.

Da $CA = CB$ (§. 59. Z. 1.), so müssen diese auf der Sehne A B schief, und zwar in gleicher Entfernung von dem Lothe, das von C nach A B geht, aufstehen (§. 80. Z. 3. §. 89. Z. 4.). Jede gerade Linie also, die, wie C F, von C nach der Sehne A B selbst geht, also zwischen A und B sie trifft, ist kleiner, als C A, d. h. kleiner als der Halbmesser: jede gerade Linie hingegen, die, wie C D, von C aus an die Verlängerung A E der Sehne A B geht, also die verlängerte Sehne jenseits des Punkts A trifft, ist grösser, als C A, d. h. grösser, als der Halbmesser (§. 89.). Ist aber dies, so ist der Abstand vom Mittelpunkte C des Kreises für jeden Punkt der Sehne A B kleiner, und für jeden Punkt ihrer Verlängerung A E grösser, als der Halbmesser (§. 88. Zus.); folglich liegt die Sehne

ganz innerhalb, ihre Verlängerung hingen ganz ausserhalb des Kreises (§. 60. Z. 2.).

Zus. 1. Jede Sehne schneidet also, verlängert die Kreislinie, und zwar nur in zwey Punkten. Denn, ginge sie noch durch irgend einen dritten Punkt von ihr, so stände der Mittelpunkt von drey Punkten der Sehne gleich weit ab (§. 129. Z. 1.) wider (§. 29. Z. 2.), welches unmöglich ist.

Zus. 2. Jede Sehne gehört also zu zwey Bogen, die auf entgegengesetzten Seiten von ihr liegen, und einander zur Peripherie ergänzen; auch ist sie kleiner, als jeder von diesen Bogen (§. 88).

A n m e r k u n g.

Dieser Lehrsatz (El. 3, 2.) wird bey dem Beweise von (El. 3, 1.) schon vorausgesetzt, kann also nicht, wie gewöhnlich geschieht, vermittelst des letzteren bewiesen werden, ohne einen Kreis im Beweisen zu machen. Er kann aber, von diesem ganz unabhängig bewiesen werden, wenn man nur, wie hier geschehen ist, annimmt, daß, nebst dem Kreise, der zum Beweise gebraucht wird, auch dessen Mittelpunkt gegeben sey, oder, was eben so viel ist, daß dieser Kreis gar nicht gegeben, sondern von dem, der den Beweis zu führen hat, erst beschrieben,

und zugleich dessen Mittelpunkt bezeichnet werde — eine Voraussetzung, zu welcher man vermöge §. 61. allerdings berechtigt ist, weil jeder, der einen Kreis beschreiben soll, erst einen Mittelpunkt und Halbmesser dazu erhalten, oder selbst wählen muß.

Lehrsatz 41.

§. 132. Eine gerade Linie ist auf einer Sehne lothrecht, wenn sie vom Mittelpunkte des Kreises aus nach der Mitte der Sehne geht, oder sie halbirt; und sie halbirt die Sehne, wenn sie vom Mittelpunkte aus auf ihr lothrecht ist; und sie geht durch des Kreises Mittelpunkt, wenn sie auf der Sehne in deren Mitte lothrecht ist.

Hypoth.

I. Theil.

Saz.

1) C ist des Kreises Mittelpunkt. Fig. 11. $CGE = CGF$
 $= R.$

Hypoth.

II. Theil.

Saz.

1) C ist der Mittelpunkt. $EG = GF.$

2) $CGE = CGF$
 $= R.$

Hypoth.	III. Theil.	Saz.
1) $E G = G F$		C ist des Kreises
2) $C G E = C G F$		Mittelpunkt.
$= R.$		

B e w e i s.

Nachdem durch den vorigen Lehrsaz (40) die Anmerkung 2 zu §. 80. gerechtfertiget ist, so ist der Beweis der drey Theile dieses Sazes einerley mit dem §. 80. Zus. 6. Nro. I. III. IV. gegebenen.

Zusatz. Zwey Sehnen, die nicht beyde Durchmesser sind, halbiren einander nicht.

Denn, ist nur die eine ein Durchmesser, die andere aber nicht, so ist offenbar, daß die letzte die erste nicht halbiren könne. Ist aber keine von beyden ein Durchmesser, wie $K L$, $G H$ (Fig. 49.), so müßte, wofern sie einander in M halbiren sollten, die $C M$ auf beyden lothrecht seyn (Lehrs. 41.); folglich wäre $C M G = C M K = R.$ (§. 57.) wider (§. 24.), welches unmöglich ist.

A u f g a b e 18.

§. 133. Den Mittelpunkt eines gegebenen Kreises zu finden.

Gegeben	Fig.	Gesucht
Der $\odot$ B D E	50.	Des $\odot$ B D E Mit-
		telpunkt.

A u f l ö s u n g.

1) Ziehe in dem Kreise, nach Willkühr, eine gerade Linie D E.

2) Halbire solche in F (§. 71.).

3) Errichte in F die F A auf ihr lothrecht (§. 72.) und verlängere sie rückwärts nach B.

4) Halbire die A B in C (§. 71.); so ist C der gesuchte Mittelpunkt.

B e w e i s.

1) Da (p. constr.) die gerade Linie A B auf der Sehne D E in deren Mitte F lothrecht ist, so ist in ihr des Kreises Mittelpunkt (§. 132.).

2) Da (§. 129. Z. 1.) des Kreises Mittelpunkt die Eigenschaft hat, von allen Punkten der Peripherie gleich weit entfernt zu seyn, so muß der Mittelpunkt des Kreises B D E von den Punkten A und B gleich weit entfernt seyn; er kann also kein an-

derer seyn, als der Punkt, welcher die Mitte der Linie A B bezeichnet.

5) Dies ist aber (p. constr.) der Punkt C; folglich ist C der gesuchte Mittelpunkt.

L e h r s a z 42.

§. 134. Jeder Durchmesser theilt die Kreislinie sowohl, als die Kreisfläche, in zwey congruente Theile.

Hypoth.	Fig.	Satz.
A B ist ein Durchmesser des $\odot$	50.	1) Bogen A E B $\stackrel{S}{=} A D B$
A D B E.		2) Fläche E A B $\stackrel{S}{=} D A B.$

B e w e i s.

1) Wenn der Abschnitt E A B um den unverrückten Durchmesser A B gedreht, und so lange gegen den Abschnitt D A B hin geneigt wird, bis er mit diesem in einer Ebene liegt; so muß auch der Bogen A E B mit dem Bogen A D B ganz zusammenfallen, und ihn decken, weil sonst in beyden Punkte vorhanden seyn würden, deren Entfernungen vom Mittel-

punkte C ungleich wären, welches dem Begriffe des Kreises (§. 59. 129. Z. 1.) widerspricht, also unmöglich ist.

2) Wenn aber, während an der rechten Seite der Durchmesser A B die gemeinschaftliche Grenze der beyden Flächen E A B, D A B ist, an der linken der Bogen A E B den Bogen A D B deckt (p. dem. 1.); so fallen auch die beyden Flächen E A B, D A B gänzlich zusammen, so, daß sie nur als eine anzusehen sind, folglich decken sie einander (§. 20.).

Zus. 1. Demnach halbirt jeder Durchmesser sowohl die Kreislinie, als die Kreisfläche, oder er theilt beyde in Hälften (Halbkreise) (§. 129.), welchen er als Sehne zugehört (§. 130. 131. Z. 2.).

Zus. 2. Aus denselben Gründen und durch dieselben Schlüsse ist, vermöge §. 74. erweislich, daß der auf dem Durchmesser lothrecht aufgestellte Halbmesser sowohl den Bogen als die Fläche des Halbkreises halbire oder in zwey Quadranten theile (§. 129.).

Zus. 3. Demnach theilen zwey auf einander lothrecht stehende Durchmesser, sowohl die Kreislinie, als die Kreisfläche in vier Quadran-

ten (Zus. 2.), und mithin steht jeder Mittelpunktswinkel, der einem rechten gleich ist, auf einem Quadranten (§. 130.).

Zus. 4. Die Sehne des Quadranten ist also die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreyecks, dessen Katheten die Halbmesser des Kreises sind (Zus. 3.).

Zus. 5. Daher sind alle Sehnen des Quadranten in einerley Kreise oder in gleichen Kreisen einander gleich (§. 59. Z. 1. §. 66.).

Zus. 6. Eine Sehne, die den Kreis ungleich theilt, ist kein Durchmesser (Zus. 1.).

Zus. 7. Eine Sehne AD (F. 48.), die kein Durchmesser ist, theilt den Kreis in zwey ungleiche Theile AND , AOD .

Denn, zieht man den Durchmesser AB , so ist $ADB = AOB$ (Zus. 1.). Nun ist $AND < ADB$ (§. 24.); also auch $AND < AOB$ (§. 35.); folglich um so viel mehr $AND < AOD$ (§. 37.).

Zus. 8. Jede Sehne, die den Kreis halbirt, ist also ein Durchmesser (Zus. 7.)

L e h r s a z. 43.

§. 135. Im Kreise haben gleiche Sehnen gleichen Abstand vom Mittelpunkte, und: Sehnen die vom Mittelpunkte gleichen Abstand haben, sind gleich.

Von ungleichen Sehnen hingegen ist die, welche einen grössern Abstand vom Mittelpunkte hat, kleiner, und: die kleinere hat einen grösseren Abstand vom Mittelpunkte; endlich ist der Durchmesser grösser, als jede andere Sehne.

I. T h e i l.

Hypoth.

Fig.

Satz.

1) Es ist $DE = FG$. 51. Es ist $CL = CM$.2) CL , CM sind

Lothe von dem Mit-

telpunkte C auf DE , FG .

V o r b e r e i t u n g.

Ziehe CF , CD .

B e w e i s.

1) Da (p. hyp.) $CLD = CMF = R$,
so ist $DL = \frac{1}{2} DE$, und $FM = \frac{1}{2} FG$
(§. 132.).

2) Da (p. hyp.) $DE = FG$, so ist auch
 $DL = FM$ (§. 27.)

3) Da ausserdem auch $CD = CF$ (§. 59.

Q

Z. 1.), so ist $\triangle C D L \cong \triangle C F M$ (§. 95.),
und mithin $C L = C M$.

II. T h e i l.

Hypoth.

Satz.

1) $C L, C M$ sind
Lothe von dem
Mittelpunkte C
auf $D E, F G$.

Es ist $D E = F G$.

2) Es ist $C L =$
 $C M$.

B e w e i s.

1) Da (p. hyp.) $C L D = C M F = R$,
so ist $D L = \frac{1}{2} D E$, und $F M = \frac{1}{2} F G$ (§. 132.).

2) Da (p. hyp.) $C L = C M$, und (p. def.)
 $C D = C F$, so ist $\triangle C D L \cong \triangle C F M$
(§. 95.), und mithin $D L = F M$.

3) Da (p. dem. 1.) $D L = \frac{1}{2} D E$, und
 $F M = \frac{1}{2} F G$, aber (p. dem. 2.) $D L = F M$;
so ist auch $D E = F G$ (§. 26.).

III. T h e i l.

Hypoth.

Satz.

1) $C N, C L$ sind
Lothe von dem
Mittelpunkte C
auf $H K, D E$.

Es ist $H K < D E$.

2) Es ist $C N > C L$.

V o r b e r e i t u n g.

1) Von der CN schneide $CM = CL$ ab (§. 65.).

2) In M errichte auf CN das Loth FM (§. 72.) und verlängere solches bis nach G .

3) Ziehe CF , CG , CH , CK .

B e w e i s.

1) Da $CF = CH$, $CG = CK$ (p. def.), aber $FCG \triangleright HCK$ (§. 24.); so ist $FG \triangleright HK$, (§. 90.).

2) Da (p. constr.) $CM = CL$, und $CMF = CMG = R$, so ist p. dem. (II. Thl.) $FG = DE$.

3) Da (p. dem. 1.) $FG \triangleright HK$, aber (p. dem. 2.) $FG = DE$; so ist auch $DE \triangleright HK$ (§. 35.), also $HK \triangleleft DE$.

V I. T h e i l.

Hypoth.

Saz.

1) Es ist $HK \triangleleft DE$.

Es ist $CN \triangleright CL$.

2) CN , CL sind Lothe von dem Mittelpunkt C auf HK , DE .

V o r b e r e i t u n g u n d B e w e i s.

1) Von C aus mache auf der CN die $CM = CL$ (§. 65.), so muß M zwischen C und N fallen.

Denn fiel M jenseits N , so wäre $C M > C N$, folglich p. dem. (III. Thl.) $DE < HK$, wider die Voraussetzung: $HK < DE$, welches unmöglich ist.

2) Fällt aber M zwischen C und N , so ist $C N > C M$ (§. 24.).

3) Da nun (p. constr.) $C M = C L$, so ist auch $C N > C L$ (§. 35.).

V. T h e i l.

Hypoth:

Satz.

1) AB ist des $\odot$ BDK Durchmesser, und C sein

Mittelpunkt.

2) CN , CL sind Lothe von dem Mittelpunkte C auf HK , DE .

3) Es ist $CN > CL$.

V o r b e r e i t u n g.

1) Von der CN schneide die $CM = CL$ ab (§. 65.).

2) In M errichte auf der CM das Loth FM (§. 72.), und verlängere solches nach G .

3) Ziehe CF , CG , CH , CK .

B e w e i s.

1) Da $CF + CG > FG$ (§. 82.), aber $CF = AC$, und $CG = CB$ (p. def.); so ist auch $AC + CB$, d. i. $AB > FG$ (§. 35.).

2) Da (p. constr.) $CM = CL$, und CM, CL Lothe auf FG, DE sind, so ist p. dem. (II. Thl.) $FG = DE$.

3) Da (p. dem. 1.) $AB > FG$, und (p. dem. 2.) $FG = DE$, so ist auch $AB > DE$ (§. 34.).

4) Da nun (p. hyp.) $CL < CN$ ist, so ist p. dem. (III. Thl.) $DE > HK$.

5) Und da (p. dem. 3.) $AB > DE$, so ist noch vielmehr $AB > HK$ (§. 36.).

6) Da nun eben so von jeder andern Sehne erweislich ist, daß sie kleiner als der Durchmesser sey, so ist der Durchmesser grösser, als jede andere Sehne.

Zus. Die ersten vier Theile dieses Satzes gelten, vermöge §. 129. Z. 9. auch von gleichen Kreisen.

L e h r s a z 44.

§. 136. Wenn von einem innerhalb oder ausserhalb einer Kreislinie angenommenen Punkte eine gerade Linie durch den Mit-

telpunkt nach zwey Punkten der Kreislinie geht, so hat unter allen Punkten der Kreislinie derjenige, welcher in der eben genannten geraden Linie mit dem angenommenen Punkte auf einerley Seite des Mittelpunkts liegt, den kleinsten; derjenige hingegen, welcher auf der entgegengesetzten Seite des Mittelpunkts liegt, den grössten Abstand von dem angenommenen Punkte: bey allen übrigen Punkten der Kreislinie aber steht der Abstand von dem angenommenen Punkte mit dem Abstände von dem Punkte derselben, der in jener geraden Linie, mit dem angenommenen Punkte auf einerley Seite des Mittelpunkts liegt, in einem solchen Zusammenhange, daß, welche zwey Punkte der Kreislinie man auch herausnehmen mag, immer jener Abstand für den einen kleiner, eben so groß, oder größer ist, als für den andern, je nachdem dieser es ist; auch liegen jede zwey Punkte der Kreislinie, die von dem angenommenen Punkte gleichen Abstand haben, auf entgegengesetzten Seiten jener geraden Linie, die von dem angenommenen Punkte

durch den Mittelpunkt nach zwey Punkten der Kreislinie geht.

I. F a l l.

Der angenommene Punkt liegt innerhalb der Kreislinie.

Hypoth.	Fig.	Saz.
1) Von dem Punkte A innerhalb des $\odot$ D F K geht eine gerade Linie durch den Mittelpunkt C, welche verlängert die Kreislinie in den Punkten B D schneidet.	51. a.	1) $A E > A B$. 2) $A F > A E$. 3) $A G > A F$. 4) $A D > A G$. 5) $A H = A E$. 6) Ausser H hat kein anderer Punkt der Kreislinie auf der nämlichen Seite von B mit dem Punkte E gleichen Abstand von dem A; oder: ausser A H, geht auf derselben Seite von B keine andere Li-
2) E, F, G sind Punkte der Kreislinie zwischen B und D in zunehmender Entfernung von B, so daß $B F > B E$, und $B G > B F$.		
3) H ist auf der rechten Seite des		

Punkts B von diesem nie $\equiv$ A E von
 eben so weit entfernt, A aus an die
 als E auf der linken, Kreislinie.
 so daß $BH \equiv BE$.

4) K liegt mit H auf
 einerley Seite des
 Punkts B oder der Li-
 nie B D.

V o r b e r e i t u n g.

1) Aus A ziehe A E, A F, A G, A H,
 A K.

2) Aus B die B K.

3) Aus C die C E, C F, C G, C H,
 C K.

B e w e i s.

1) Da $AE + AC > CE$ (§. 82.);
 aber $CE = CB$ (p. def.) $= AB + AC$;
 so ist $AE + AC > AB + AC$, und mit-
 hin $AE > AB$. (§. 29.).

2) Da (p. hyp.) $BF > BE$, aber $BC =$
 $CE = CF$; so ist $BCF > BCE$ (§. 91.),
 d. i. $ACF > ACE$. Da nun $CF = CE$,
 und $AC = AC$, so ist $AF > AE$
 (§. 90.).

3) Eben so ist erweislich, daß $A G \succ A F$.

4) Da $A C + C G \succ A G$; aber $C G = C D$; so ist auch $A C + C D$, d. i. $A D \succ A G$.

5) Da (p. hyp.) $BH = BE$, auch (p. def.) $CH = CB = CE$; so ist $BCH = BCE$ (§. 69.), d. i. $ACH = ACE$. Da nun $CE = CH$ auch $AC = AC$, so ist $AH = AE$ (§. 66.).

6) Hätte nun ausser dem Punkte H noch ein anderer Punkt K auf der nämlichen Seite der Linie B D mit dem Punkte E gleichen Abstand von dem Punkte A, so wäre $AK = AE$; folglich, da (p. dem. 5.) $AE = AH$, auch $AK = AH$. Da nun $CK = CH$, $BC = BC$, aber $BCK \succ BCH$, so ist $BK \succ BH$ (§. 90.); folglich der Punkt K von dem B entfernter, als der Punkt H, und mithin hätte der dem Punkte B nähere Punkt H mit dem entfernteren K einerley Abstand von dem Punkte A; wider demonstr. 2. 3. 4. welches unmöglich ist.

II. F a l l.

Fig. 51. b.

Der angenommene Punkt liegt ausserhalb der Kreislinie.

Dieser Fall unterscheidet sich von dem ersten bloß dadurch, daß hier nicht nur die von dem angenommenen Punkte durch den Mittelpunkt, sondern jede von demselben nach irgend einem Punkte der hohlen Peripherie gehende gerade Linie die Kreislinie noch in einem andern Punkte trifft, indem sie nämlich auch der erhabenen Peripherie in irgend einem Punkte begegnet.

Uebrigens gilt der Satz für die Durchschnittpunkte der von dem angenommenen Punkte an die hohle, wie für jene der, von demselben an die erhabene Peripherie gehenden, geraden Linien, und überhaupt finden sonst in beyden Fällen durchgängig dieselben Gründe und dieselben Schlüsse Statt. Daher sind auch in Fig. 51. b. die Durchschnittpunkte der von A aus an die hohle Peripherie gehenden geraden Linien mit den gleichnamigen accentuirten Buchstaben E', F', G' etc. bezeichnet.

Zus. 1. Demnach giebt es für jeden Punkt der Kreislinie immer nur zwey andere Punkte derselben, die von ihm gleichen Abstand haben, und zwar liegen sie auf entgegengesetzten Seiten von ihm. Denn man kann jeden Punkt der Kreislinie als den Endpunkt (B) einer geraden Linie betrachten, die von einem innerhalb oder ausserhalb der Kreislinie angenommenen Punkte (A) durch den Mittelpunkt nach zwey Punkten der Kreislinie geht.

Zus. 2. Von jedem Punkte, welcher nicht der Mittelpunkt ist, gehen also nach einer Kreislinie immer nur zwey gerade Linien, die auf entgegengesetzte Seiten des Durchmesfers, in welchem der angenommene Punkt liegt, fallen (Zus. 1.).

Zus. 3. Diese zwey gleiche gerade Linien gehen an die Endpunkte der Sehne, die der Durchmesser, in welchem der angenommene Punkt liegt, halbirt (§. 132. 66.).

Zus. 4. Wenn also von einem Punkte mehr, als zwey, gleiche gerade Linien an die Kreislinie gehen, so ist dieser Punkt des Kreises Mittelpunkt (Zus. 2.).

A n m e r k u n g.

Die beyden Euklidischen Sätze (El. 3, 8. 9.), welche dieser, dem 17ten analoge, Lehrsatz ent-

hält, hat schon Hausen, wiewohl auf eine ganz andere Weise, in einen zusammengezogen.

Erklärung 45.

§. 137. Kreislinien, die in einerley Ebene liegen, heißen concentrisch, wenn sie einerley Mittelpunkt; excentrisch, wenn sie verschiedene Mittelpunkte haben. Von zwey Kreislinien liegt die eine ganz innerhalb oder ganz ausserhalb der andern, wenn jeder Punkt der einen innerhalb oder ausserhalb der andern liegt. Kreislinien, die einen Punkt gemein haben, laufen in demselben zusammen. Eine Kreislinie, die mit einer andern zusammenläuft, schneidet sie, wenn die, durch den gemeinschaftlichen Punkt abgeschnittenen, und auf entgegengesetzten Seiten desselben liegenden Theile der einen zugleich auf entgegengesetzten Seiten der andern liegen. Hingegen berührt eine Kreislinie die andere, wenn sie mit ihr so zusammenläuft, daß die, durch den gemeinschaftlichen Punkt abgeschnittenen, und auf entgegengesetzten

Seiten desselben liegenden Theile der einen auf einerley Seite der andern, also entweder beyde innerhalb, oder beyde ausserhalb der andern, liegen. In jenem Falle geschieht die Berührung inwendig, in diesem auswendig. Die gerade Linie, welche die Mittelpunkte zweyer excentrischen Kreislinien verbindet, heisst die Centrallinie.

Zus. 1. Concentrische Kreislinien haben ungleiche Halbmeser. Denn hätten sie gleiche Halbmeser, so fielen sie gänzlich zusammen, wären also nur eine einzige Kreislinie (§. 129. Z. 5.).

Zus. 2. Von zwey concentrischen Kreislinien (F. 48.) liegt also die, welche den kleineren Halbmeser (G K) hat, ganz innerhalb der andern (§. 60.), und alle Punkte beyder, die auf dem nämlichen Halbmeser der grösseren liegen, stehen um den Unterschied der Halbmeser (E L oder K F) von einander ab.

Zus. 3. Also sind alle Kreislinien, die ganz ausserhalb einander liegen, oder, die einander berühren oder schneiden, excentrisch (Zus. 2.).

Zus. 4. Zwey Kreislinien können einander nicht in mehr, als zwey Punkten schneiden.

Denn, gesetzt sie schnitten sich in drey Punkten, so würden, wenn man nach §. 133. den

Mittelpunkt der einen Kreislinie nähme und von demselben an die drey gemeinschaftlichen Punkte gerade Linien zöge, diese einander gleich seyn (§. 59. Z. 1.); und weil dieselben drey Punkte (p. hyp.) auch in der andern Kreislinie liegen, so gingen auch an diese von dem nämlichen Punkte innerhalb derselben drey gleiche gerade Linien: folglich wäre der nämliche Punkt auch der Mittelpunkt der andern (§. 136. Z. 4.), und mithin hätten zwey sich schneidende Kreislinien einerley Mittelpunkt, wider Zus. 3. welches unmöglich ist.

Zus. 5. Zwey Kreislinien, die einander in einem Punkte schneiden, müssen sich auch noch in einem andern Punkte schneiden.

Denn, wenn sich beyde in einem Punkte schneiden, so liegt (p. def.) ein Theil der einen innerhalb und der andere Theil ausserhalb der andern, folglich geht die eine durch einen Punkt innerhalb und durch einen Punkt ausserhalb der andern, und mithin müssen sie sich in zwey Punkten schneiden (§. 60. Zus. 5.).

Zus. 6. Folglich haben zwey Kreislinien, die einander schneiden, immer zwey Punkte gemein (Zus. 5.).

Zus. 7. Wenn daher zwey Kreislinien nur einen Punkt gemein haben, so berühren sie sich (Zus. 5.).

Z u s. 8. Zwey Kreise, die einander schneiden, haben eine gemeinschaftliche Sehne.

Denn, da zwey Kreise, die einander schneiden, zwey Punkte gemein haben (Zus. 6), so gehört die gerade Linie, welche diese Punkte verbindet, als Sehne zu beyden Kreisen (§. 130.).

Z u s. 9. Die Centrallinie zweyer excentrischen Kreise ist der Abstand ihrer Mittelpunkte (E. 45. §. 88. Z.).

L e h r s a z 45.

§. 138. Wenn zwey Kreislinien zwey Punkte gemein haben, so sind ihre Halbmesser nebst der Centrallinie so beschaffen, daß jede zwey dieser Linien zusammen grösser als die dritte sind.

Hypoth.	Fig.	Saz.
1) D E C, D C F sind zwey Kreislinien, welche die Punkte C, D gemein haben.	52	1) $A B + A C > B C.$
2) A, B sind ihre Mittelpunkte.		2) $A C + B C > A B.$
		3) $A B + B C > A C.$

V o r b e r e i t u n g.

1) Ziehe die gemeinschaftliche Sehne C D (§. 137. Z. 8.).

2) Halbire sie in G (§. 71.).

3) Errichte in G auf der C D die A G lothrecht (§. 72.), und verlängere sie bis nach B.

4) Ziehe die A C, B C.

B e w e i s.

1) Das Loth auf C D in deren Mitte G muß durch die Punkte A, B gehen (§. 132.).

2) Der Punkt C liegt ausserhalb der Linie A B (§. 45. Z. 2.).

3) Die Linien A C, B C sind Halbmesser beyder Kreise, und machen nebst der Centrallinie A B die Seiten eines Dreyecks aus; folglich sind jede zwey derselben zusammen grösser, als die dritte (§. 82.).

Zus. 1. Wenn daher zwey Kreislinien einander schneiden, so sind ihre Halbmesser nebst der Centrallinie von der genannten Beschaffenheit (§. 137. Z. 6.).

Zus. 2. Die gemeinschaftliche Sehne zweyer Kreise, die einander schneiden, wird von der geraden Linie durch die Mittelpunkte beyder unter rechten Winkeln halbirt.

Denn, wird auf der Mitte dieser Sehne ein Loth errichtet, so muß solches durch die Mit-

telpunkte beyder Kreise gehen. (§. 132.). Da nun zwischen zwey Punkten nicht mehr, als eine, gerade Linie möglich ist (§. 45.); so muß, umgekehrt, die gerade Linie, welche durch die Mittelpunkte beyder Kreise geht, auch lothrecht durch die Mitte ihrer gemeinschaftlichen Sehne gehen.

Lehrsatz 46.

§. 139. Wenn in zwey Kreislinien die Halbmeser und die Centrallinie so beschaffen sind, daß jede zwey derselben zusammen größer, als die dritte sind, so schneiden die Kreislinien einander über und unter der Centrallinie.

Hypoth.	Fig.	Satz.
DEC, DCF sind zwey Kreise, worin	52.	Der $\odot$ D E C schneidet den $\odot$ D C F in C über und in D unter A B.
1) $AB + AC > BC$.		
2) $AC + BC > AB$.		
3) $AB + BC > AC$.		

Beweis.

Dieser ist in §. 82. Anm. 1. enthalten.

Zus. 1. Wenn daher zwey Kreislinien zwey Punkte gemein haben, so schneiden sie sich in

R

denselben über und unter der Centrallinie (§. 138.).

Zus. 2.) Also können zwey Kreislinien sich nur in einem Punkte berühren. Denn hätten sie noch einen zweyten Punkt gemein, so würden sie sich in diesen beyden Punkten schneiden (Zus. 1.), und könnten sich also nicht in einem derselben berühren (§. 137.).

Zus. 3. Wenn daher zwey Kreislinien einander in einem Punkte berühren, so liegt ausser diesem Punkte entweder die eine ganz innerhalb der andern, oder jede ganz ausserhalb der andern (§. 60.).

L e h r s a z 47.

§. 140. Wenn in zwey excentrischen Kreislinien der Halbmesser der einen mit der Centrallinie zusammen dem Halbmesser der andern gleich ist, so berühren beyde einander inwendig.

Hypoth.	Fig.	Satz
1) E A F, B H G sind excentrische Kreise.	53.	Der Kreis E A F berührt den Kreis B H G inwendig in dem Punkte A.
2) Des $\odot$ E A F Mittelpunkt ist C, sein Halbmesser A C.		

3) Des $\odot$ B H G Mittelpunkt ist D, sein Halbmesfer D B.

4) Es ist $A C + C D = D B$.

B e w e i s.

1) Da (p. hyp.) $A C + C D = D B$, so ist $A D = D B$, folglich liegt A auch in der Kreislinie B H G, und mithin haben beyde Kreislinien den Punkt A gemein.

2) Aber ausser dem Punkte A haben sie keinen andern mehr gemein, denn sonst wäre $A C + C D > D B$ (§. 138.); folglich berühren sie sich in A (§. 137. Z. 7).

3) Nun ist (p. hyp.) $A C < D B$, also auch $2 A C < 2 D B$ (§. 31.), d. i. $A E < A B$; folglich liegt E zwischen A und B, also innerhalb der Kreislinie B H G (§. 60.).

4) Demnach liegt die Kreislinie E A F, ausser dem Punkte A, ganz innerhalb der B H G (§. 139. (Zus. 3.)); folglich berührt sie diese inwendig (§. 137.).

(Zus. Wenn daher zwey Kreislinien einen Punkt A in der Verlängerung der Centrallinie

CD gemein haben, so berührt die, welche den kleinern Halbmesser A C hat, die andere inwendig in A, weil alsdann die Bedingung des Lehrsazes 47. Statt findet.

A n m e r k u n g.

Dieser Lehrsaz kann auch so ausgedrückt werden: Wenn in zwey Kreislinien der Abstand der Mittelpunkte dem Unterschiede der Halbmesser gleich ist, so berühren sie sich inwendig (§. 137. Z. 9. und §. 29.).

L e h r s a z 48.

§. 141. Wenn die Halbmesser zweyer excentrischen Kreislinien zusammen der Centrallinie gleich sind, so berühren sich die Kreislinien auswendig.

Hypoth.	Fig.	Saz.
1) E A F, B H G sind excentrische Kreise.	54.	Der Kreis E A F berührt den Kreis B H G auswendig
2) Des $\odot$ E A F Mittelpunkt ist C, sein Halbmesser A C.		in dem Punkte A.
3) Des $\odot$ B H G Mittelpunkt ist D, sein Halbmesser B D.		
4) Es ist $A C + B D = C D$.		

B e w e i s.

1) Da (p. hyp.) $AC + BD = CD$, so ist $AC < CD$, folglich liegt A zwischen C und D, und mithin ist $AC + AD = CD = AC + BD$, also $AC = BD$; folglich liegt A auch in der Kreislinie B H G, und mithin haben beyde Kreislinien den Punkt A gemein.

2) Aber ausser dem Punkte A haben sie keinen andern mehr gemein, weil sonst $AC + BD > CD$ wäre (§. 138.), folglich berühren sie sich in A (§. 137. Z. 7.).

3) Nun liegt B ausserhalb E A F (§. 60.), folglich liegt die Kreislinie B H G, den Punkt A ausgenommen, ganz ausserhalb der E A F (§. 139. Z. 3.), mithin berührt sie diese auswendig (§. 137.).

Zus. Wenn daher zwey Kreislinien einen Punkt A in der Centrallinie zwischen den Mittelpunkten C, D gemein haben, so berühren sie sich in A auswendig, weil alsdann die Bedingung des Lehrsazes 48. Statt findet.

A n m e r k u n g.

Dieser Lehrsaz kann auch so ausgedrückt werden: Wenn in zwey Kreislinien der Abstand

der Mittelpunkte der Summe der Halbmesser gleich ist, so berühren sie sich auswendig (§. 137. Z. 9.).

L e h r s a z 49.

§. 142. Wenn zwey Kreislinien einander berühren, es mag inwendig oder auswendig geschehen, so liegt der Berührungspunkt mit den Mittelpunkten beyder in einer geraden Linie.

Hypoth.	Fig.	Saz.
1) Die zwey Kreislinien E A F, B H G berühren sich in A.	53. 54.	Des $\odot$ B H G Mittelpunkt D liegt mit den Punkten A und C in einer geraden Linie.
2) Des $\odot$ E A F Mittelpunkt ist C.		

B e w e i s.

1) Läge des $\odot$ B H G Mittelpunkt D mit den Punkten A und C nicht in einer geraden Linie, so läge er ausser der Linie durch A und C in K; alsdann ist C K die Centrallinie, A K des $\odot$ B H G, und A C des $\odot$ E A F Halbmesser, folglich jede

zwey von diesen Linien zusammen grösser, als die dritte (§. 82.).

2) Ist aber dies, so schneiden sich die beyden Kreislinien in A (§. 139.), folglich können sie sich nicht in A berühren (§. 137.).

3) Dies widerspricht aber der Voraussetzung und ist also unmöglich; folglich muß des $\odot$ B H G Mittelpunkt D mit den Punkten A und C in einer geraden Linie liegen.

Zus. Wenn also zwey Kreislinien einander inwendig berühren, so ist der Halbmesser der einen mit der Centrallinie zusammen dem Halbmesser der andern gleich. Wenn hingegen zwey Kreislinien einander auswendig berühren, so sind die Halbmesser beyder zusammen der Centrallinie gleich; oder: in jenem Falle ist der Abstand der Mittelpunkte dem Unterschiede, in diesem hingegen der Summe der Halbmesser beyder Kreislinien gleich.

Lehrsatz 50.

§. 143. Wenn in zwey excentrischen Kreislinien der Halbmesser der einen mit der Centrallinie zusammen kleiner ist, als der Halbmesser der andern; so liegt die erste ganz

innerhalb der andern, und umgekehrt:
Wenn eine Kreislinie ganz innerhalb der andern liegt, so ist der Halbmesser von jener mit der Centrallinie zusammen kleiner, als der Halbmesser von dieser.

I. T h e i l.

Hypoth.	Fig.	Satz.
1) B H G, E K F sind excentrische Kreise.	55.	Der $\odot$ E K F liegt ganz innerhalb des $\odot$ B H G.
2) D, C ihre Mittelpunkte.		
3) Es ist $D C + C E < B D$.		

B e w e i s.

1) Da (p. hyp.) $D C + C E < B D$, d. i. $D E < B D$, so liegt E innerhalb B H G (§. 60. Z. 2.).

2) Da $C K = C E$, $A D = D B$ (p. def.), so ist $C D + C K = C D + C E$, folglich $C D + C K < A D$, also um so viel mehr $C K < A D$ also noch viel mehr $C K < A C$; folglich liegt K zwischen A und C, d. i. innerhalb B H G.

3) Nun liegt auch jeder andere Punkt L von K E F innerhalb B H G, weil $DL < CD + CL$ (§. 82.), und $CD + CL < DB$ (p. hyp.), folglich um so viel mehr $DL < DB$ ist.

Also liegt die Kreislinie K E F ganz innerhalb der B H G (§. 137.).

II. T h e i l.

Hypoth.

Saz.

Von den excentrischen Kreisen K E F, B H G, deren Mittelpunkte C, D sind, liegt der erste ganz innerhalb des andern.

Es ist $DC + CE < BD$.

B e w e i s.

Liegt die ganze Kreislinie K E F innerhalb der B H G, so liegt auch der Punkt E innerhalb B H G (§. 137.); folglich ist $CE < CB$; also auch $CD + CE < CD + CB$, d. i. $CD + CE < BD$.

A n m e r k u n g.

Dieser Lehrsatz kann auch so ausgedrückt werden: Wenn in zwey Kreislinien der Unter-

schied der Halbmesser größer ist, als der Abstand der Mittelpunkte, so liegt die eine ganz innerhalb der andern und umgekehrt (§. 32. 137. Z. 9.).

L e h r s a z 51.

§. 144. Wenn die Halbmesser zweyer Kreislinien zusammen kleiner sind, als die Centrallinie, so liegt jede ganz ausserhalb der andern, und umgekehrt: Wenn eine Kreislinie ganz ausserhalb der andern liegt, so sind die Halbmesser beyder zusammen kleiner, als die Centrallinie.

I. T h e i l.

Hypoth.

Fig.

Satz.

Es ist $BD + CF < CD$.

56.

Der $\odot H E F$ liegt ganz ausserhalb des $\odot$

$A B G$.

B e w e i s.

1) Da (p. hyp.) $BD + CF < CD$, so ist um so viel mehr $CF < CD$, folglich der Punkt F zwischen C und D , und mithin $DF + CF = CD$, also $BD + CF <$

$DF + CF$, also $BD < DF$; folglich liegt F ausserhalb ABG (§. 60. Z. 2.), also um so vielmehr E .

2) Da nun ferner $CH + DH > CD$ (§. 82.), d. i. $CF + DH > CD$, und (p. hyp.) $CD > BD + CF$, so ist um so viel mehr $CF + DH > BD + CF$, also $DH > BD$. Folglich liegt auch jeder dritte Punkt H der Kreislinie HEF ausserhalb der ABG (§. 60. Z. 2.), und mithin liegt jede dieser beyden Kreislinien ganz ausserhalb der andern (§. 137.).

II. Theil.

Hypoth.

Saz.

Der $\odot HEF$ liegt ganz ausserhalb des $\odot ABG$. Es ist $BD + CF < CD$.

Beweis.

Liegt die ganze Kreislinie HEF ausserhalb der ABG , so liegt auch der Punkt F ausserhalb ABG (§. 137.), folglich ist $BD < DF$, also auch $BD + CF < DF + CF$. d. i. $BD + CF < CD$.

A n m e r k u n g 1.

Dieser Lehrsatz kann auch so ausgedrückt werden: Wenn in zwey Kreislinien die Summe der Halbmesser kleiner ist, als der Abstand der Mittelpunkte, so liegt jede ganz ausserhalb der andern, und umgekehrt (§. 137. Z. 9.).

A n m e r k u n g 2.

Von diesem Saze (Anm. 1.) und dem obigen (§. 143. Anm.) ist in des Herrn Prof. Gilbert Geometrie (B. II. Lehrs. 16.) der gerade entgegengesetzte Saz irriger Weise aufgestellt, und zu beweisen versucht worden — ein Versehen, das dem Scharfsinne dieses Gelehrten nicht würde entgangen seyn, wenn er nicht verabsäumt hätte, für diese Fälle eine besondere Figur zu verzeichnen.

E r k l ä r u n g 46.

§. 145. Eine gerade Linie, die eine krumme in einem Punkte berührt, d. h. so mit ihr zusammentrifft, daß beyde Theile der geraden auf einerley Seite der krummen liegen, und umgekehrt (§. 55.), heisst eine **Tangente** der krummen für diesen Punkt. Eine gerade Linie hingegen, die eine krumme in einem Punkte schneidet,

d. h. so mit ihr zusammentrifft, daß beyde Theile der geraden auf entgegengesetzten Seiten der krummen liegen, und umgekehrt (§. 55.), heißt eine *Secante* der krummen für diesen Punkt. So ist in Fig. 57. D E eine Tangente und F G eine Secante des Kreises B A I für den Punkt B.

Lehrsatz 52.

§. 146. Eine gerade Linie, die auf dem Durchmesser in seinem Endpunkte lothrecht steht, berührt die Kreislinie, und zwar bloß in diesem einzigen Punkte.

Hypoth.

Fig.

Satz.

- 1) A B ist des $\odot$ B A I Durchmesser. 57. D E berührt den $\odot$ B A I in B, u.
- 2) In dessen Endpunkte B ist D E so aufgestellt, daß
 $ABD = ABE = R$.
 zwar bloß in B.

Vorbereitung.

In der Linie D E nimm, nach Willkühr, die Punkte H, K an, und ziehe aus dem Mittelpunkte C die Linien C H, C K.

B e w e i s.

1) Da (p. hyp.) ABD , d. i. $CBH = R$, so ist $CHB < R$ (§. 80. Z. 4.), also $CHB < CBH$, und mithin $CH > CB$ (§. 31.), folglich liegt der Punkt H ausser der Kreislinie (§. 60. Z. 2.).

2) Eben so ist erweislich, daß der Punkt K , und so überhaupt jeder andere Punkt, den B ausgenommen, ausser der Kreislinie liege.

3) Demnach liegt sowohl der Halbkreis BIA , als der Halbkreis BLA auf einerley Seite von DE (§. 51.); folglich berührt DE die Kreislinie in B (§. 55.), und zwar bloß in diesem Punkte.

Zus. Also ist die gerade Linie DE , die auf dem Durchmesser AB in seinem Endpunkte lothrecht steht, eine Tangente der Kreislinie für den Punkt B (§. 145.), und zwar nur für diesen Punkt.

L e h r s a z 53.

§. 147. Jede gerade Linie, die schief durch den Endpunkt des Durchmessers geht, schneidet die Kreislinie ausser diesem Punkte noch in einem andern.

Hypoth.	Fig.	Saz.
1) A B ist des $\odot$ B A I Durchmesser.	57.	F G schneidet den $\odot$ B A I ausser dem
2) Durch dessen Endpunkt B geht F G so, daß $A B F < R$.		Punkte B noch in einem andern I.

V o r b e r e i t u n g.

Aus dem Mittelpunkte C fälle auf die F G das Loth C M (§. 73.).

B e w e i s.

1) Da (p. hyp.) $A B F$, d. i. $C B F < R$, so fällt das Loth von C nach F G mit dem Winkel C B F auf einerley Seite der Linie C B. (§. 80. Z. 2.).

2) Da nun (p. constr.) $C M B = R$, so ist $C B M < C M B$ (§. 80. Z. 4.); folglich $C M < C B$ (§. 81.).

3) Ist aber $C M < C B$, so liegt M innerhalb der Kreislinie (§. 60. Z. 2.), und B M muß also diese ausser M noch in I schneiden (§. 60. Z. 4.).

Zus. 1. Die gerade Linie F G, welche unter einem schiefen Winkel durch den Endpunkt B des Durchmessers A B geht, ist also eine Se-

cante der Kreislinie für die Punkte B, I (§. 145.).

Zus. 2. Die Tangente D E ist also auf dem Durchmesser A B, der den Berührungspunkt B zum Endpunkte hat, lothrecht. Denn ginge sie schief durch A B, so schnitte sie die Kreislinie noch in einem andern Punkte I (Lehrs. 53.); folglich läge der Theil B I von ihr innerhalb der Kreislinie (§. 131.), also der Bogen B I nicht auf derselben Seite der Tangente, auf welcher der Bogen B A I liegt (§. 51.), also wäre sie keine Tangente (§. 145.).

Zus. 3. Daher ist auch umgekehrt jede gerade Linie, die vom Mittelpunkte nach dem Berührungspunkte geht, auf der Tangente lothrecht (Zus. 2. §. 75. Z. 2.).

Zus. 4. Jedes Loth, auf der Tangente, im Berührungspunkte aufgestellt, geht durch den Mittelpunkt der Kreislinie. Denn ginge es nicht durch den Mittelpunkt, so wäre die gerade Linie vom Mittelpunkte nach dem Berührungspunkte, auf der Tangente lothrecht (Zus. 3.), folglich wären in demselben Punkte einer geraden Linie zwey Lothe auf derselben aufgestellt, wider (§. 47. Zus.), welches unmöglich ist.

Zus. 5. Demnach kann eine gerade Linie die Kreislinie nur in einem einzigen Punkte berühren (§. 146.).

Zus. 6. Daher kann überhaupt keine gerade Linie mit einer Kreislinie mehr, als zwey Punkte gemein haben. Denn eine gerade Linie, die mit einer Kreislinie zusammentrifft, muß solche entweder berühren, oder schneiden (§. 55. 145.). Berührt sie die Kreislinie, so geschieht dies nur in einem Punkte (Zus. 5.); schneidet sie aber dieselbe, so ist der innerhalb der Kreislinie liegende Theil von ihr eine Sehne des Kreises (§. 130.), deren Verlängerung die Kreislinie nur in zwey Punkten schneidet (§. 131. Z. 1.).

Zus. 7. Daher ist auch für jeden Punkt der Kreislinie nicht mehr, als eine Tangente möglich (§. 74. Zus.).

Zus. 8. Demnach haben zwey Kreise, die einander berühren, im Berührungspunkte eine gemeinschaftliche Tangente. Denn der Berührungspunkt ist ein Punkt sowohl in der einen, als in der andern Kreislinie, und für diesen Punkt ist nicht mehr als eine Tangente möglich. (Zus. 7.)

Zus. 9. Zwischen dem Bogen BI und der Tangente BE ist keine gerade Linie möglich. Denn, da BE auf AB lothrecht ist (Zus. 2.), so ist jede andere gerade Linie durch den Punkt B schief auf der AB (§. 74. Zus.) und mithin schneidet sie die Kreislinie (Lehrs. 53.).

L e h r s a z 54.

§. 148. Zwey Tangenten, die von einem Punkte aus an die Kreislinie gehen, sind einander gleich, und jede gerade Linie, die von einem Punkte ausserhalb der Kreislinie so an die Kreislinie geht, daß sie der von demselben Punkte an die Kreislinie gehenden Tangente gleich ist, ist selbst eine Tangente.

I. T h e i l.

Hypoth. Fig. Satz.
Sowohl AD , als DB 58. Es ist $AD = DB$.
ist eine Tangente des

⊙ AEB .

V o r b e r e i t u n g.

1) Nimm des Kreises Mittelpunkt C (§. 133).

2) Ziehe CA , CB , CD .

B e w e i s.

Da (p. hyp.) sowohl DA , als DB eine Tangente des Kreises ist, so ist $CAD = CBD$ (§. 147. Z. 2.). Ferner ist $AC = CB$ (p. def.) auch $CD = CD$, folg.

lich $\triangle A D C \cong \triangle B D C$ (§. 95.) und
mithin $A D = D B$.

II. Theil.

Hypoth.

Satz.

1) $A D$ ist eine Tangente des $\odot A E B$ für den Punkt A .

$D B$ ist eine Tangente des $\odot A E B$ für den Punkt B .

2) $D B = A D$.

Vorbereitung.

Wie bey Theil I.

Beweis.

1) Da (p. hyp.) $D B = A D$, auch $B C = A C$ (p. def.) und $C D = C D$, so ist $\triangle B D C \cong \triangle A D C$ (§. 69.); folglich $D B C = D A C$.

2) Da (p. hyp.) $A D$ eine Tangente für den Punkt A ist, so ist $D A C = R$ (§. 147. Z. 2.).

3) Da (p. dem. 1.) $D B C = D A C$, und (p. dem. 2.) $D A C = R$, so ist auch $D B C = R$ (§. 25.); folglich ist $D B$ eine Tangente des $\odot A E B$ für den Punkt B (§. 146. Z.).

Zus. 1. Demnach sind von jedem Punkte ausserhalb des Kreises immer nur zwey verschiedene Tangenten an die Kreislinie möglich. Denn jede zwey Tangenten, die von einem Punkte aus an die Kreislinie gehen, sind gleich (Lehrs. 54.), und von jedem Punkte, welcher nicht der Mittelpunkt ist, gehen nach einer Kreislinie nur zwey gleiche gerade Linien (§. 136. Z. 2.).

Zus. 2. Wenn von einem Punkte (D) zwey Tangenten (D A, D B) an die Kreislinie gehen, so wird durch die von diesem Punkte (D) nach dem Mittelpunkte (C) gehende gerade Linie (D C) 1) der Winkel (A C B), den die nach den Berührungspunkten gehenden Halbmeser am Mittelpunkte, — 2) der Winkel (A D B), den die beyden Tangenten an ihrem Durchschnittspunkte einschliessen, und 3) die Sehne des Bogens (A B), den die beyden Tangenten einschliessen, halbirt, und die letzte lothrecht geschnitten.

Das Erste und Zweyte folgt aus der Congruenz der Dreyecke A D C, B D C, die unter der angenommenen Voraussetzung (Lehrs. 54.) jedesmal Statt hat; das Dritte aber aus dem Ersten vermöge §. 80. Z. 6.

A u f g a b e 19.

§. 149. Durch einen Punkt in der Kreislinie eine, und durch einen Punkt ausser-

halb derselben zwey Tangenten an die Kreislinie zu ziehen.

I. F a l l.

Gegeben.

Fig.

Gesucht.

Eine Kreislinie B D E 5g. Die Tangente der
und in dieser ein Kreislinie für den
Punkt B. Punkt B.

Auflösung und Beweis.

1) Nimm des Kreises Mittelpunkt C (§. 133.).

2) Aus C ziehe nach B den Halbmesser C B.

3) In B errichte auf C B das Loth A B (§. 72.), so ist A B die verlangte Tangente für den Punkt B (§. 146. Zus.).

II. F a l l.

Gegeben.

Fig.

Gesucht.

1) Eine Kreislinie 5g. Die zwey Tangen-
B D E. ten, welche von A

2) Ausser dieser aus an die Kreisli-
ein Punkt A. nie B D E gehen.

A u f l ö s u n g.

1) Nimm des Kreises Mittelpunkt C (§. 133.).

- 2) Ziehe die A C.
- 3) Aus C beschreibe mit A C die Kreislinie F A G.
- 4) In dem Punkte D errichte auf der C D das Loth D F (§. 72.).
- 5) Verlängere D F rückwärts bis nach G.
- 6) Ziehe C B F, C H G, wie auch A B, A H, so sind A B, A H die verlangten Tangenten.

B e w e i s.

1) Da die Kreise A F G, B D E (p. constr.) concentrisch sind, so ist $A C = C F$, $B C = C D$. (p. def.); auch ist $\angle A C B = \angle D C F$, folglich $\triangle B A C \cong \triangle C F D$ (§. 66.), und mithin $A B C = C D F = R$. (p. constr.); folglich ist A B die Tangente des $\odot B D E$ für den Punkt B (§. 146. Z.).

2) Nun ist eben so erweislich, daß A H die Tangente des $\odot B D E$ für den Punkt H sey.

3) Da nun die beyden Tangenten A B, A H von dem gegebenen Punkte aus an den $\odot B D E$ gehen, aber von einem Punkte nur zwey Tangenten an die Kreislinie

gehen können (§. 148. Z. 1.), so sind A B, A H die verlangten Tangenten.

A u f g a b e 20.

§. 150. An zwey Kreislinien, die sich inwendig oder auswendig berühren, eine gemeinschaftliche Tangente zu ziehen.

Gegeben.	Fig.	Gesucht.
Zwey Kreislinien B H G, A E F, die sich inwendig oder auswendig berühren.	53. 54.	Die gemeinschaftliche Tangente beyder Kreislinien für den Berührungspunkt A.

A u f l ö s u n g u n d B e w e i s.

1) Nimm die Mittelpunkte C, D beyder Kreise (§. 133.), und verbinde sie durch eine gerade Linie, so geht diese durch den Berührungspunkt A. (§. 142.).

2) In A errichte auf der C A das Loth A L (§. 72.), und verlängere solches bis nach M, so ist, da C A D eine einzige gerade Linie ist, L M in A auch auf A D lothrecht; folglich ist L M die gemein-

schaftliche Tangente der beyden Kreislinien für den Berührungspunkt A (§. 146. Z. §. 147. Z. 8.).

Lehrsatz. 55.

§. 151. Wenn von einem Punkte, dessen Abstand von des Kreises Mittelpunkte der Sehne des Quadranten gleich ist, eine dem Halbmesser gleiche gerade Linie an die Kreislinie geht, so ist sie eine Tangente derselben.

Hypoth.	Fig.	Satz.
1) C ist des $\odot$ D B G Mittelpunkt.	60.	A D ist eine Tangente des $\odot$ D B H für den Punkt D.
2) A C der Sehne des Quadranten gleich.		
3) Von A geht die dem Halbmesser gleiche A D an die Kreislinie.		

Vorbereitung.

Ziehe den Halbmesser C D.

Beweis.

Da (p. hyp.) A C der Sehne des Quadranten gleich, und $A D = D C$, so ist

$A D C = R$ (§. 134. Z. 4.), folglich $A D$ eine Tangente des $\odot D B G$ für den Punkt D (§. 146. Zus.).

L e h r s a z 56.

§. 152. Wenn von einem Punkte, dessen Abstand von des Kreises Mittelpunkte der Sehne des Quadranten gleich ist, eine Tangente an die Kreislinie geht, so ist sie dem Halbmesser gleich.

Hypoth.

Fig.

Satz.

1) C ist des $\odot D B G$ Mittelpunkt. 60. $A D$ ist dem Halbmesser gleich.

2) $A C$ der Sehne des Quadranten gleich.

3) Von A geht die Tangente $A D$ an die Kreislinie.

V o r b e r e i t u n g.

Ziehe den Halbmesser $C D$.

B e w e i s.

Da (p. hyp.) $A D$ eine Tangente ist, so ist $A D C = R$ (§. 147. Z. 2.); und da $A C$

der Sehne des Quadranten gleich ist, so ist $AD = DC$ (§. 134. Z. 4.).

Lehrsatz 57.

§. 153. Wenn von einem Punkte eine dem Halbmesser gleiche Tangente an die Kreislinie geht, so ist der Abstand dieses Punkts von des Kreises Mittelpunkte der Sehne des Quadranten gleich.

Hypoth.

Fig.

Satz.

1) C ist des $\odot$ D B G
Mittelpunkt.

60. A C ist der Sehne
des Quadranten
gleich.

2) Von A geht die
dem Halbmesser glei-
che Tangente an die
Kreislinie.

Vorbereitung.

Ziehe den Halbmesser C D.

Beweis.

Da (p. hyp.) A D eine Tangente ist, so ist $ADC = R$ (§. 147. Z. 2.), und da $AD = DC$, so ist A C der Sehne des Quadranten gleich (§. 134. Z. 4.).

Zus. Demnach ist jede dem Halbmesser gleiche Tangente anzusehen als Kathete des rechtwinkligen gleichschenkeligen Dreyecks, das die Sehne des Quadranten zur Hypotenuse hat.

L e h r s a z. 58.

§. 154. Wenn von einem Punkte zwey Tangenten so an die Kreislinie gehen, daß sie mit der Sehne zwischen den Berührungspunkten einen halben rechten Winkel machen, so sind sie dem Halbmesser der Kreislinie gleich.

Hypoth.

Fig.

Saz.

1) Von A aus gehen
an die Kreislinie
D B G die Tangen-
ten A D, A B.

60.

Die Tangenten
A D, A B sind
dem Halbmesser
der Kreislinie
gleich.

2) B D ist die Sehne
zwischen den Be-
rührungspunkten.

3) Es ist $\frac{A D B}{A B D} = \frac{1}{2} R.$

V o r b e r e i t u n g.

1) Nimm des Kreises Mittelpunkt C
(§. 133.).

2) Ziehe $A F C$, $B C$, $D C$.

B e w e i s.

1) Da (p. hyp.) $A D$ eine Tangente ist, so ist $A D C = R$ (§. 147. Z. 2.).

2) Da (p. hyp.) $A D B = \frac{1}{2} R$ ist, so ist

$$\left. \begin{array}{l} A D C - A D B \\ B D C \end{array} \right\} = \frac{1}{2} R \text{ (§. 29.)} = A D B \text{ (p. hyp.).}$$

3) In den zwey Dreyecken DAF , DCF hat man also $DF = DF$, $AFD = DFC = R$ (§. 148. Z. 2.), und (p. dem. 2.) $ADF = CDF$; folglich ist $\triangle DAF \cong \triangle DCF$ (§. 79.), und mithin $AD = DC$.

4) Da nun $AB = AD$ (§. 148.), so ist auch $AB = DC = BC$ (§. 25.).

L e h r s a z. 59.

§. 155. Wenn zwey dem Halbmesser gleiche Tangenten an die Kreislinie gehen, so ist der Winkel, welchen sie mit der Sehne zwischen den Berührungspunkten einschliessen, ein halber rechter.

Hypoth.	Fig.	Satz.
1) Von A aus gehen an die Kreislinie	60.	Es ist $ADB =$ $ABD = \frac{1}{2} R.$

D B G zwey' dem Halb-
mesfer gleiche Tangen-
ten A D, A B.

2) B D ist die Sehne
zwischen den Berüh-
rungspunkten.

V o r b e r e i t u n g.

1) Nimm des Kreises Mittelpunkt C
(§. 133.).

2) Ziehe C D, C B.

B e w e i s.

1) Da (p. hyp.) A D, A B Tangenten
sind, so ist $A D C = A B C = R$ (§. 147.
Z. 2.).

2) Da (p. hyp.) $A D = D C$, $A B = B C$,
auch $B D = B D$, so ist $A D B = B D C$,
und $A B D = D B C$ (§. 69.); also jeder
dieser vier Winkel $= \frac{1}{2} R$.

E r k l ä r u n g. 46. a.

§. 155. a. Eine geradlinige Figur von vier
gleichen Seiten und vier rechten Winkeln
heißt ein Quadrat.

A n m e r k u n g.

Die Erklärung des Quadrats, welches schon §. 134. mit seinen unterscheidenden Merkmalen unter den Parallelogrammen aufgeführt worden ist, mußte so, wie es hier geschehen ist, abgefaßt werden, um den nachstehenden Lehrsatz mit allen seinen Folgen von der Parallelentheorie gänzlich unabhängig zu machen, und mit aller erforderlichen Strenge zu beweisen, ohne, auch nur von ferne, an die Parallelen zu erinnern, weil eine beyfallerzwingende Berichtigung der Parallelentheorie nur allein auf diesem Wege zu Stande gebracht werden konnte.

L e h r s a z 60.

§. 156. Die Diagonalen des Quadrats halbiren einander lothrecht und sind einander gleich.

Hypoth.	Fig.	Satz.
1) A B D C ist ein Quadrat, also $AB = BD = DC = AC$, und $ABD = BDC = ACD = BAC = R$.	45.	1) Es ist $AE = ED$. 2) $BE = EC$. 3) $AD = BC$. 4) Die Winkel bey E sind rechte.
2) A D, B C sind Diagonalen des Quadrats,		

B e w e i s.

1) Da (p. hyp. et def.) $AB = AC$, $BD = CD$, auch $AD = AD$, so ist $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ (§. 69.), und mithin $BAD = CAD$, $ADB = ADC$.

2) Es ist aber (p. hyp. et def.) $BAC = BDC = R$, folglich $BAD = CAD = ADB = ADC = \frac{1}{2}R$ (§. 27.).

3) Eben so ist erweislich, daß auch $ACB = BCD = ABC = CBD = \frac{1}{2}R$ sey.

4) Daß nun die Diagonalen AD , BC einander in E schneiden müssen, erhellet aus §. 55. Z. 3.

5) Demnach sind in den vier Dreyecken, in welche das Quadrat, durch die Diagonalen zerlegt wird, alle Winkel an den gleichen Grundlinien einander gleich, also die Dreyecke gleichschenkelig (§. 68.), und die gleichen Schenkel aller auch unter einander gleich (§. 79.), also $AE = ED = BE = EC$.

6) Folglich ist auch $AE + ED = BE + EC$ (§. 28.) d. i. $AD = BC$.

7) Da (p. hyp.) $B D = C D$, und (p. dem. 4.) $B E = E C$, auch $D E = D E$, so ist $B E D = D E C$ (§. 69.) $= R$ (§. 57). Diesen Winkeln aber sind ihre Scheitelwinkel gleich (§. 77.), also die Winkel bey E rechte.

Zus. 1. Das Quadrat wird durch die Diagonalen in vier congruente gleichschenkelige rechtwinkelige Dreyecke getheilt (p. dem. 4. 6.).

Zus. 2. Im gleichschenkeligen rechtwinkeligen Dreyecke ist der Winkel an der Grundlinie $= \frac{1}{2} R$ (p. dem. 2. 3.).

Zus. 3. Im gleichschenkeligen rechtwinkeligen Dreyecke ist also der rechte Winkel so groß, als die beyden schiefen zusammen (Zus. 2.).

Zus. 4. In dem Dreyecke, welches die Halbmeser mit der Sehne des Quadranten bilden, ist jeder der Winkel, die jene mit dieser einschliesen, $= \frac{1}{2} R$. Denn dieses Dreyeck ist ein gleichschenkeliges rechtwinkeliges (§. 134. Z. 4.), und jeder Winkel des Halbmesers mit der Quadrantensehne ist ein Winkel an der Grundlinie desselben; folglich gilt der Satz vermöge Zus. 2.

Zus. 5. Die Sehne des Quadranten ist also doppelt so groß, als ihr Abstand vom Mittelpunkte des Kreises. Denn ist in Fig. 60. $B D$

die Quadrantensehne, so ist, wenn man aus dem Mittelpunkte C die Halbmeser C B, C D zieht, $B C D = R$ (§. 134. Z. 4.), und $C B D = B D C = \frac{1}{2} R$ (Zus. 4.). Wird nun noch B D in F halbt und C F gezogen, so ist auch $B C F = D C F = \frac{1}{2} R$ (§. 80. Z. 6.); also $B F = C F = D F$ (§. 68.), und mithin

$$\left. \begin{array}{l} B F + D F \\ B D \end{array} \right) = 2 C F \text{ (§. 28.).}$$

Zus. 6. In einem gleichschenkeligen Dreyecke, in welchem der Winkel an der Grundlinie $= \frac{1}{2} R$, ist der von gleichen Schenkeln eingeschlossene Winkel $= R$.

Denn wenn (Fig. 60.) $A B = A D$, und $A B D = A D B = \frac{1}{2} R$, so wird, wenn B D in F halbt, A F gezogen, und bis F C $= A F$ verlängert, alsdann aber C D, C B gezogen wird, $C D = A B$, und $C B = A D$ (§. 66.), also $C B = C D = A D = A B$ (§. 25.), weil (p. hyp.) $A B = A D$; folglich ist alsdann $\triangle B C D \cong \triangle B A D$ (§. 69.), und mithin $B D C = A D B$, und $D B C = A B D$. Nun ist (p. hyp.) $A D B = A B D = \frac{1}{2} R$, also auch $B D C = D B C = \frac{1}{2} R$, und mithin

$$\left. \begin{array}{l} A D B + B D C \\ A D C \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} A B D + D B C \\ A B C \end{array} \right) = R.$$

Da nun (p. dem.) $C B = C D$, so muß ein Kreis, der aus C mit C B beschrieben wird,

durch D gehen. Wird also dieser Kreis beschrieben, so ist A D eine Tangente desselben für den Punkt D (§. 146. Zus.); und da (p. dem.) $AD = CD$, so ist A C die Quadrantensehne für diesen Kreis (§. 153.). Nun ist (p. hyp.) $AB = AD$, folglich ist A B die zweyte Tangente, die von dem Punkte A aus an den Kreis geht (§. 148.); und

da (p. dem.) auch $AB = BC$, so ist $\left. \begin{matrix} BAC \\ DAC \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}R$,
(Zus. 3.); folglich $\left. \begin{matrix} BAC + DAC \\ BAD \end{matrix} \right\} = R$.

Lehrsatz 61.

§. 157. Wenn von einem Punkte zwey dem Halbmesser gleiche Tangenten an die Kreislinie gehen, so berühren sie diese in den Endpunkten der Quadrantensehne.

Hypoth.	Fig.	Satz.
Von A gehen an die Kreislinie D B G zwey dem Halbmesser gleiche Tangenten A D, A B.	60.	B D ist die Quadrantensehne des Kreises D B G.

Vorbereitung.

1) Nimm des Kreises Mittelpunkt C (§. 133.).

2) Ziehe die Halbmesser $C B$, $C D$ an die Berührungspunkte.

3) Ziehe die Sehne $B D$ zwischen den Berührungspunkten.

4) Ziehe $A F C$.

B e w e i s.

Da (p. hyp.) $A B = A D = B C$ und $A B$, $A D$ Tangenten sind, so ist $A C$ die Quadrantensehne

(§. 153.), folglich $B A C$
 $D A C$ } $= \frac{1}{2} R$ (§. 156. Z. 4.)

und mithin $B A C + D A C$
 $B A D$ } $= R$, also auch

$B D$ die Quadrantensehne (§. 154. Z. 4.).

Zus. 1. Aus dem Beweise erhellet, daß zwey dem Halbmesser gleiche Tangenten mit einander einen rechten Winkel einschliesen.

Zus. 2. Demnach kann man in einem gleichschenkeligen Dreyecke, in welchem der Winkel an der Grundlinie $= \frac{1}{2} R$, die Grundlinie betrachten als die Quadrantensehne, und die gleichen Schenkel als zwey an die Endpunkte dieser Sehne gehende, dem Halbmesser desselben Kreises gleiche Tangenten. Denn der dritte Winkel eines solchen Dreyecks ist $= R$ (§. 156. Z. 6.);

und zwey dem Halbmesser gleiche Tangenten gehen an die Endpunkte der Quadrantensehne unter Winkeln, deren jeder $\equiv \frac{1}{2} R$ (Lehrs. 61. und §. 156. Z. 3.), und schliesen mit einander einen rechten Winkel ein (Zus. 1.).

Zus. 3. Zwey dem Halbmesser gleiche Tangenten schliesen einen Quadranten der Kreislinie zwischen den Berührungspunkten ein.

Denn sie gehen an die Endpunkte der Quadrantensehne (Lehrs. 61.), welche (p. def.) einen Quadranten der Kreislinie abschneidet.

Zus. 4. Zwey Tangenten, die von dem Endpunkte der Quadrantensehne (d. h. von einem Punkte, dessen Abstand von des Kreises Mittelpunkte der Quadrantensehne gleich ist) ausgehen, gehen auch an die Endpunkte der Quadrantensehne. Denn gehen sie von dem Endpunkte der Quadrantensehne aus, so sind sie dem Halbmesser gleich (§. 152.); sind sie aber dem Halbmesser gleich, so gehen sie an die Endpunkte der Quadrantensehne (Lehrs. 61.).

Zus. 5. Zwey dem Halbmesser gleiche Tangenten schliesen mit den aus dem Mittelpunkte an die Berührungspunkte gehenden Halbmessern ein Quadrat (das Quadrat des Halbmessers) ein. Denn es ist $AB \equiv AD \equiv BC \equiv CD$ (p. def.)

u. $\left. \begin{matrix} ABC \\ ADC \end{matrix} \right\} \equiv R$ (§. 147. Z. 2.), aber auch

$\left. \begin{array}{l} B A D \\ B C D \end{array} \right\} = R$ (Zus. 1. u. §. 134. Z. 4.), folglich $A B C D$ ein Quadrat (das Quadrat von $B C$) (§. 155. a.).

Zus. 6. Die Quadrantensehnen sind Diagonalen von dem Quadrate des Halbmessers. Denn sind $A B$, $A D$ dem Halbmesser gleiche Tangenten, so sind $A C$, $B D$ Quadrantensehnen (§. 153. u. Zus. 4.). Eben diese sind aber auch Diagonalen von $A B C D$ (§. 58.), also von dem Quadrate des Halbmessers (Zus. 5.).

Zus. 7. Aus Zus. 5. erhellet die Möglichkeit des Quadrats und die Construction desselben ganz unabhängig von der Parallelen theorie. Denn soll z. B. das Quadrat der Linie $B C$ (F. 60.) verzeichnet werden, so beschreibe mit $B C$ den Kreis $D B G$, errichte in C auf $B C$ den Halbmesser $C D$ lothrecht und ziehe $B D$, so ist $B D$ die Quadrantensehne dieses Kreises (§. 134. Z. 4.). Halbiere alsdann $B D$ in F , ziehe $C F$, und verlängere sie bis $F A = C F$; ziehe endlich $A D$, $A B$, so ist $A B C D$ das Quadrat von $B C$. Denn da (p. constr.) $C F = F A$, $B F = F D$, und $C F D = A F B$ (§. 77.), so ist $A D = B C$, und $A B = C D$ (§. 66.), folglich, da (p. def.) $B C = C D$, $A B = A D = B C = C D$. Da ferner $B D = 2 C F$ (§. 156. Z. 5.), aber (p. constr.) $A F = C F$, so ist auch $B D = A C$. Nun ist

(p. dem.) $B D$ die Quadrantensehne, also ist auch $A C$ die Quadrantensehne für den Kreis $D B G$; und von dem Endpunkte A der Quadrantensehne $A C$ gehen zwey, (p. dem.) dem Halbmesser gleiche, gerade Linien $A B$, $A D$ an den Kreis, folglich sind $A B$, $A D$ Tangenten dieses Kreises (§. 151.); und da sie dem Halbmesser gleich sind, so ist $A B C D$ das Quadrat des Halbmessers $B C$ (Zus. 5.).

Zus. 8. Wenn zwey dem Halbmesser gleiche Tangenten an die Kreislinie gehen, so halbiren die Sehne zwischen den Berührungspunkten und die gerade Linie, die von dem Durchschnittspunkte der Tangenten nach des Kreises Mittelpunkt geht, einander lothrecht und sind einander gleich; auch zerlegen eben diese Linien die von den Tangenten und den aus dem Mittelpunkt an die Berührungspunkte gehenden Halbmessern eingeschlossene Figur (das Quadrat des Halbmessers Zus. 5.) in vier congruente gleichschenkelige rechtwinkelige Dreyecke.

Denn die beyden genannten Linien sind Quadrantensehnen (§. 153. und Zus. 4.) und zugleich Diagonalen von dem Quadrate des Halbmessers (Zus. 6.), also folgt alles Uebrige aus §. 156.

L e h r s a z 62.

§. 158. Wenn von einem Punkte zwey Tangenten so an die Kreislinie gehen, daß

sie diese in den Endpunkten der Quadrantensehne berühren, so sind sie dem Halbmesser der Kreislinie gleich.

Hypoth.	Fig.	Satz.
1) Von A ausgehen an den $\odot$ D B G die Tangenten A D, A B.	60.	A D, A B sind dem Halbmesser B C des $\odot$ D B G gleich.
2) B D ist die Quadrantensehne für den $\odot$ D B G.		

V o r b e r e i t u n g.

1) Nimm des Kreises Mittelpunkt C (§. 133.).

2) Ziehe die Halbmesser C B, C D.

B e w e i s.

1) Da (p. hyp.) B D die Quadrantensehne des Kreises D B G ist, C B, C D aber (p. constr.) Halbmesser desselben sind, so ist

$$\left. \begin{array}{l} C B D \\ C D B \end{array} \right\} = \frac{1}{2} R \quad (\S. 156. Z. 3.).$$

2) Da (p. hyp.) A B, A D Tangenten sind,

$$\text{so ist } \left. \begin{array}{l} A B C \\ A D C \end{array} \right\} = R \quad (\S. 147. Z. 2.).$$

$$\left. \begin{array}{l} 3) \text{ Demnach ist } A B C - C B D \\ A B D \end{array} \right\} = \frac{1}{2} R \quad (\S. 27. 29.).$$

4) Da nun (p. hyp.) $A B, A D$ Tangenten sind, aber (p. dem. 3.) $\left. \begin{array}{l} A B D \\ A D B \end{array} \right\} = \frac{1}{2} R$ ist, so ist $A B = B C, A D = D C$ (§. 154.)

L e h r s a z 63.

§. 159. Der gleichschenkelige Winkel im Halbkreise ist ein rechter.

Hypoth. Fig. Satz.

1) $A B$ ist des $\odot$ Durchmesser, also $A D B$ ein Winkel im Halbkreise. 61. Es ist $A D B = R$.

2) Es ist $A D = D B$.

Vorbereitung.

1) Nimm des Kreises Mittelpunkt C (§. 133.).

2) Ziehe den Halbmesser $C D$.

B e w e i s.

1) Da (p. constr.) C des Kreises Mittelpunkt, folglich $A C = C D = C B$, und (p. hyp.) $A D = D B$ ist, so ist $A C D = D C B = R$. (§. 69. 57.); folglich A D sowohl als D B Quadrantensehne für den Kreis A B D (§. 134. Z. 4.).

2) Nun ist jeder der Winkel, welche die Quadrantensehne als Hypotenuse mit den Halbmessern, als Katheten im rechtwinkligen Dreyecke macht, $= \frac{1}{2} R$. (§. 156. Z. 4.),

folglich $\left. \begin{array}{l} A D C \\ B D C \end{array} \right\} = \frac{1}{2} R$, und mithin

$$\left. \begin{array}{l} A D C + B D C \\ A D B \end{array} \right\} = R.$$

Zus. 1. Die Schenkel des gleichschenkeligen Winkels im Halbkreise sind also Quadrantensehnen eben dieses Kreises (p. dem. 1.).

Zus. 2. Demnach ist jeder Schenkel des gleichschenkeligen Winkels im Halbkreise doppelt so groß als sein Abstand vom Mittelpunkte des Kreises (Zus. 1. und §. 156. Z. 5.).

Zus. 3. Von den Schenkeln A E, B E des ungleichschenkeligen Winkels im Halbkreise A E B (Fig. 61.) kann keiner einem Schenkel (A D oder

D B) des gleichschenkeligen Winkels in demselben Halbkreise gleich seyn.

Denn die Schenkel A E, B E des ungleichschenkeligen Winkels im Halbkreise A E B bilden, wie die Schenkel A D, D B des gleichschenkeligen Winkels im Halbkreise A D B mit dem Durchmesser A B ein Dreyeck (§. 130.). Wäre nun einer von den Schenkeln des ungleichschenkeligen Winkels im Halbkreise einem Schenkel des gleichschenkeligen Winkels in eben diesem Halbkreise gleich, z. B. $A E = A D$, so wäre A E die Quadrantensehne eben dieses Kreises (Zus. 1.), folglich $B A E = \frac{1}{2} R$ (§. 156. Z. 4.). Demnach wäre $A E = A D$, $A B = A B$, $B A E = B A D$, also $\triangle ABE \cong \triangle ABD$ (§. 66.), und mithin $B E = B D = A D = A E$ gegen die Voraussetzung.

Zus. 4. Von den Schenkeln des ungleichschenkeligen Winkels im Halbkreise ist demnach immer der eine grösser, der andere kleiner, als einer von den Schenkeln des gleichschenkeligen Winkels in demselben Halbkreise (Zus. 3. und §. 22.).

Zus. 5. Bei dem grösseren A E von den Schenkeln des ungleichschenkeligen Winkels im Halbkreise ist demnach der Abstand vom Mittelpunkte kleiner, bey dem kleineren B E hingegen grösser, als seine Hälfte. Denn wäre der

Schenkel A E von dem Mittelpunkte eben so weit entfernt, als der Schenkel A D, so wäre doch des Schenkels A E Abstand vom Mittelpunkte kleiner als seine Hälfte, weil A E grösser als A D (Zus. 4.) und für den letzteren der Abstand vom Mittelpunkte seiner Hälfte gleich ist (Zus. 2.). Aber der Schenkel A E ist überdies, weil er (Zus. 4.) grösser, als der A D ist, dem Mittelpunkte näher, als der letztere (§. 135.); folglich ist um so viel mehr sein Abstand vom Mittelpunkte kleiner, als seine Hälfte.

Eben so ist erweislich, daß des kleineren Schenkels B E Abstand vom Mittelpunkte grösser, als seine Hälfte, sey.

Zus. 6. Ein Kreis, der aus der Mitte der Grundlinie des gleichschenkeligen rechtwinkligen Dreyecks mit der Hälfte derselben als Halbmesser beschrieben wird, geht durch die Spitze des rechten Winkels.

Denn, wenn $AD = DB$, $AC = CB$, und $ADB = R$, so ist, wenn C D gezogen wird, $ADC = CDB = \frac{1}{2} R$, und $ACD = DCB = R$ (§. 80. Z. 6.). Demnach hat das Dreyeck D A C mit dem Dreyecke, was die Sehne des Quadranten, als Hypotenuse, mit den Halbmessern, als Katheten, einschließt, eine Seite (den Halbmesser A C) und zwey Winkel ($ACD = R$, und $ADC = \frac{1}{2} R$) gleich,

folglich ist es mit dem letzteren congruent (§. 79.), oder es ist selbst dieses Dreyeck (§. 20.), und mithin $DA C \equiv \frac{1}{2} R \equiv ADC$ (§. 156. Z. 4.); folglich $AC \equiv DC \equiv CB$ (§. 68.). Demnach muß ein Kreis aus C mit $AC \equiv CB$ beschrieben, auch durch D gehen.

L e h r s a z 54.

§. 160. Auch der ungleichschenkelige Winkel im Halbkreise ist ein rechter.

Hypoth.	Fig.	Saz.
1) A B ist des $\odot D B A$ Durchmesser, also A D B ein Winkel im Halbkreise.	62.	Es ist $ADB \equiv R$.

2) Es ist $BD > AD$.

V o r b e r e i t u n g.

1) Nimm des Kreises Mittelpunkt C (§. 133.).

2) Ziehe den Halbmesser C D.

3) Halbire B D in E (§. 71.).

4) Ziehe C E und verlängere sie bis $CF \equiv CE$.

5) Ziehe A F.

6) Mache $EG \equiv ED$, und $FH \equiv AF$ (§. 65.).

7) Ziehe $D G$, $A H$.

B e w e i s.

1) Da (p. constr.) C des Kreises $D B A$ Mittelpunkt, also $C D = C B$, auch $D E = E B$ ist, so ist $\triangle C D E \stackrel{\circ}{=} \triangle C B E$ (§. 69.), folglich $C E D = C E B = R$ (§. 57.).

2) Da (p. constr.) $C E = C F$, und (p. def.) $C B = C A$, auch $B C E = A C F$ (§. 77.), so ist $\triangle C B E \stackrel{\circ}{=} \triangle C A F$ (§. 66.), also $B E = A F$, und $C E B = A F C = R$ (p. dem. 1.).

3) Nun ist (p. dem. 1.) $\triangle C B E \stackrel{\circ}{=} \triangle C D E$, folglich ist auch $\triangle C A F \stackrel{\circ}{=} \triangle C D E$, also $A F = D E$, $A F C = C E D = R$ (p. dem. 2.).

4) Da nun ferner (p. constr.) $F H = A F = D E$ (p. dem. 3.), und $E G = D E$ ist, so ist auch $F H = E G$ (§. 25.).

5) Da nun (p. dem. 3. 4.) $A F = D E$, $F H = E G$ und $A F H = D E G = R$, so ist $\triangle A F H \stackrel{\circ}{=} \triangle D E G$ (§. 66.), und mithin $A H = D G$.

6) Da $E G \rangle C E$, u. $F H \rangle C F$ (§. 159. ED) $A F$ Z. 5.)

so fällt G von E, und H von F aus betrachtet, jenseits C, also G und H auf entgegengesetzte Seiten von C (§. 51.).

7) Da nun (p. def.) $CA = CD$, also $\begin{matrix} C A D \\ A D C \end{matrix} \triangleq R$ (§. 80. Z. 5.), so muß ein Loth, von C nach A D gefällt, innerhalb des Dreyecks A C D zu liegen kommen (§. 89. Z. 8.), folglich liegen A und D, so wie G und H, auf entgegengesetzten Seiten dieses Loths (§. 51.). Da nun A mit G auf der einen, und D mit H auf der andern Seite desselben liegt, so sind A, H und D, G die entgegengesetzten Endpunkte der Linien A D, G H; folglich müssen die sie verbindenden Linien A H, D G einander durchschneiden. Denn welche von beyden man zuerst ziehen mag, so hat alsdann die andere zwey Punkte zu verbinden, welche auf entgegengesetzten Seiten der ersten liegen, folglich muß sie diese nothwendig schneiden (§. 55. Z. 3.).

8) Da nun (p. dem. 3. 4.) A F H, D E G zwey gleichschenkelige rechtwinkelige Drey-

ecke sind, so ist $F A H = A H F = E D G = D G E = \frac{1}{2} R$ (§. 156. Z. 2.).

9) Da (p. dem. 8.) $A H F = D G E$, d. i. $G H I = I G H$, so ist $G I = H I$ (§. 68.).

10) Da nun (p. dem. 5.) $A H = D G$, und (p. dem. 9.) $H I = G I$, so ist $A H - H I = D G - G I$ (§. 29.).

11) Da nun (p. dem. 9.) $H I = G I$, und (p. dem. 8.) $G H I = I G H = \frac{1}{2} R$, so ist $G I H = R$ (§. 156. Z. 6.), und da $G I H = A I D$ (§. 77.), so ist auch $A I D = R$ (§. 25.).

12) Da nun (p. dem. 10.) $A I = D I$, und (p. dem. 11.) $A I D = R$, so ist $D A I = \frac{1}{2} R$ (§. 156. Z. 2.); und da (p. dem. 8.) auch $E D G = \frac{1}{2} R$, so ist $E D G + A D G = R$.

Z u s. 1. Demnach ist jeder Winkel im Halbkreise ein rechter (Lehrs. 64. und §. 159.).

Z u s. 2. Im ungleichseitigen rechtwinkligen Dreyecke im Halbkreise ist der rechte Winkel so groß, als die beyden schiefen zusammen.

Denn es ist $A D B = A D C + C D B$
 (§. 23.) Da nun (p. def.). $C A = C D = C B$, so
 ist $C A D = A D C$, und $C D B = C B E$
 (§. 67.); folglich $A D B = \begin{pmatrix} C A D + C B E \\ B A D + A B D \end{pmatrix}$.

Zus. 3. Auch vom ungleichseitigen rechtwinkligen Dreyecke gilt es, daß ein Kreis, der aus der Mitte der Hypotenuse, mit der Hälfte derselben als Halbmesser beschrieben wird, durch die Spitze des rechten Winkels geht.

Denn, wird die Hypotenuse $A B$ des bey D rechtwinkligen ungleichseitigen Dreyecks $A D B$ (F. 63.) in C halbt, und aus C mit $C A = C B$ ein Kreis beschrieben, so müßte dieser, wenn er nicht durch die Spitze D des rechten Winkels ginge, diesseits oder jenseits derselben durch E gehen. Zieht man nun $A E$, $E B$, so ist auch $A E B = R$ (Zus. 1.), folglich $A E B = A D B$, wider §. 83. welches unmöglich ist.

Zus. 4. Wird also aus der Mitte der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreyecks mit der Hälfte derselben als Halbmesser ein Kreis beschrieben, so geht dieser jedesmal durch die Spitze des rechten Winkels (Zus. 3. und §. 159. Z. 6.).

Zus. 5. Demnach ist in jedem rechtwinkligen Dreyecke der rechte Winkel so groß, als die beyden schiefen zusammen.

Denn, da der Kreis, der aus der Mitte seiner Hypotenuse mit deren Hälfte beschrieben wird, durch die Spitze des rechten Winkels geht (Zus. 4.), so gilt der Satz von ihm vermöge Zus. 2.

Zus. 6. In jedem Dreyecke sind die drey inneren Winkel zusammen zwey rechten gleich. Denn

a) im rechtwinkligen Dreyecke ist der rechte Winkel so groß, als die beyden schiefen zusammen (Zus. 5.), folglich sind alle drey Winkel zusammen $= 2 \text{ R.}$

b) Im stumpfwinkligen Dreyecke sind, wenn man die dem stumpfen Winkel gegenüberliegende Seite als die Grundlinie ansieht, beyde Winkel an der Grundlinie spitz (§. 80. Z. 4.); folglich fällt ein Loth von der Spitze des stumpfen Winkels nach der Grundlinie innerhalb des Dreyecks (§. 89. Z. 8.), und zerlegt also dieses in zwey rechtwinkelige, welche zusammen vier rechte Winkel enthalten (a). Zieht man davon die 2 R, welche das Loth mit der Grundlinie macht, ab, so bleiben für die inneren Winkel des Dreyecks 2 R übrig.

c) Im spitzwinkligen Dreyecke sind alle drey Winkel spitz (§. 80. A. 1.). Von welcher Winkelspitze man also nach der gegenüberliegenden Seite ein Loth fallen mag, so

fällt solches innerhalb des Dreyecks (§. 89. Z. 8.), und zerlegt also daselbe in zwey rechtwinkelige, die zusammen vier rechte Winkel enthalten (a), von welchen, nach Abzug der 2 R, die das Loth mit der Grundlinie macht, für die inneren Winkel des Dreyecks 2 R übrig bleiben.

A n m e r k u n g 1.

Mit diesen Säzen (§. 151 bis 160) glaube ich nun mein oben (§. 97. 107. Anm.) gegebenes Versprechen redlich erfüllt, und der Parallelentheorie, also mittelbar der ganzen Geometrie — von deren Lehren nur sehr wenige ohne Beyhülfe jener erwiesen werden können, — eine Grundlage untergebauet zu haben, die nichts zu wünschen übrig läßt. In der That konnte man auch an diesen widerspenstigen Unterthanen der Geometrie — den Parallelen — wegen der vielen fruchtlosen Arbeit, die das Bestreben, sie gänzlich unter die Bothmässigkeit dieser Wissenschaft zu bringen, den Geometern nun seit länger als zweytausend Jahren gekostet hat, nicht leicht eine auffallendere Rache nehmen, und der Wissenschaft die ungestörte Beherrschung derselben für alle Zukunft nicht leicht zuverlässiger versichern, als dadurch, daß man wie hier (§. 157. Z. 7.) geschehen ist, zeigte, wie sich ein Quadrat construiren, und durch Diagonalen in vier

congruente Dreyecke theilen lasse, ohne an Parallelen zu denken.

Aber, wenn wir nun auf die Positionen, die wir genommen, und die Waffen, deren wir uns bedient haben, um der Wissenschaft diesen so lange gewünschten Sieg zu erfechten, zurücksehen; so zeigen sich beyde gleich auf den ersten Blick so einfach, so kunstlos, so nahe liegend und gewöhnlich, daß wir nicht ohne Erstaunen die Frage aufwerfen können: „Was war es denn „also, das den Geometern so viele Jahrhunderte „hindurch diesen Sieg unmöglich gemacht hat?“ „War es etwa, wie so viele glaubten, der Mangel eines deutlichen Begriffs von der geraden „Linie? oder der Mangel einer genauen und „vollständigen Theorie der Lage? oder der Mangel eines von Euklid und seinen Nachfolgern „ganz übersehenen, und gleichwohl unentbehrlichen Elements, wie, dem Vorgeben nach, „die unendlichen Winkelflächen seyn sollen? „oder war es etwa der Umstand, daß der Begriff der Parallelen den des Unendlichen versteckter Weise einschließt? oder der, daß der Geometer sich hier in dem Falle befindet, nicht „bloß gewisse Eigenschaften eines Objects, sondern auch selbst die Existenz eines Subjects be- „weisen zu müssen?“ Nichts von dem allen, überhaupt in aller Welt nichts anders, als —

die liebe Schulordnung! Sie, die die Geometer von Euklids Zeiten an veranlasfete, den ersten Theil ihrer Untersuchungen der Betrachtung der geraden Linie zu widmen, und dabey auf die Kreislinie keine weitere Rücksicht zu nehmen, als, in wiefern sie ihnen zur Construction des Dreyecks unentbehrlich war, alsdann aber die Kreislinie zum besondern Gegenstande des zweyten Theils ihrer Untersuchungen zu machen, und hier eben so isolirt zu betrachten, wie die gerade Linie in dem ersten. Seltsam genug war es allerdings, dafs, obschon man nicht im Stande war, ohne Hülfe der Kreislinie ein Dreyeck zu construiren, man es doch unternahm, die Quantität der inneren Winkel deselben ohne die Kreislinie zu bestimmen. Indessen führte die grosse Fruchtbårkeit der geometrischen Principien sehr natürlich zu dieser Verirrung, und nachdem Euklid einmal in dieselbe gefallen war, verleitete sein, sonst so nachahmungswürdiges Beyspiel die späteren Geometer, ihm auf eben diesem Wege zu folgen. Auch ich meinte lange, ich müßte es durchsetzen, von Lehrsatz 24. (El. 1., 32. 2 Th.) aus den Prämissen der ersten sechzehn Sätze des ersten Buchs der Elemente einen völlig bindenden Beweis zu führen. Nachdem ich aber bey der oben (§. 97.) gegebenen Demonstration dieses

Sazes nicht nur die Kräfte des ersten Buchs der Elemente ganz erschöpft, sondern auch noch manche eingeschaltete nicht unerhebliche Sätze zu Hülfe genommen hatte, ohne jedoch verhüten zu können, daß nicht dabey möglicher Weise wenigstens noch eine Frage übrig geblieben wäre; so überzeugte ich mich bald methodisch, daß hier alle möglichen Schwierigkeiten nur dadurch gehoben werden könnten, daß der Satz El. 1, 32. 2 Th. von El. 3, 31. 1 Th. abhängig gemacht würde. Die Bemühung dieses zu bewerkstelligen, führte mich nun anfänglich, auf einem Wege, dessen genauere Beschreibung nicht hieher gehört, zu der Bemerkung, daß dabey alles lediglich darauf ankomme, von dem längstbekannten trigonometrischen Satze: „Die Tangente des Winkels von 45 Graden ist dem Halbmesser gleich,“ einen geometrischen Ausdruck und Beweis zu finden. Aber zu diesem Behufe fehlte es in den Euklidischen Elementen an den unentbehrlichsten Prämissen. Jetzt wurde mir die Vernachlässigung, womit die Tangenten des Kreises bisher in der Geometrie waren behandelt worden, erst recht auffallend; und ich sahe mich daher schlechterdings genöthiget, um ein beträchtliches tiefer als bisher geschehen war, nachzugraben, ehe ich zu der rechten Quelle kommen konnte, die

ich endlich in §. 134. Zus. 4. entdeckte. Aus dieser konnte ich alsdann die neuen Lehrsätze von §. 151. an mit ihren Folgen in der natürlichsten Ordnung ableiten. Als ich aber damit bis zu Lehrsatz 59 ohne Anstofs vorgerückt, und nun im Begriffe war, von diesem zu Lehrsatz 61. überzugehen; fand ich erst, da ich den Beweis des letzteren einleiten wollte, daß meine anfängliche Hoffnung, hier mit den Tangenten allein ausreichen zu können, eine bloße Täuschung gewesen, und es unumgänglich nothwendig sey, vorher noch Lehrsatz 60. einzuschalten, und die nächsten und merkwürdigsten Folgen desselben besonders herauszuheben. Dadurch gelang es mir dann endlich, von Lehrsatz 63. und 64. (El. 3, 31. 1. Th.) einen völlig zwingenden und rein elementarischen Beweis zu geben, daraus alsdann Lehrsatz 24. (El. 1, 32. 2 Th.) als Folgerung abzuleiten, und so ein System zu Stande zu bringen, dem, wie ich mir schmeichle, kein, durch die Lehrer der Alexandrinischen Schule gebildeter Geometer, seinen Beyfall wird versagen können, da in demselben auf der einen Seite, kein Begriff und kein Ausdruck, der dieser Schule fremd wäre, zu finden, auf der andern aber die ihr eigenthümliche Strenge im Beweisen überall beobachtet ist. Zwar könnte jemand, der blos die Lehrsätze 63. 64. mit El. 3,

31. und El. 1, 32. vergleichen wollte, allerdings mit einigem Scheine sagen, der hier eingeschlagene Weg sey länger und beschwerlicher, als der Euklidische. Allein, abgesehen davon, daß, wenn man diese Vergleichung auch auf die Parallelentheorie ausdehnt, solche selbst in Ansehung der Kürze keineswegs zum Nachtheile von jenem Wege ausfällt, so führt jener zum Ziele, dieser hingegen nicht. Denn bey jenem ist alles vollständig und genugthuend erwiesen, bey diesem hingegen beruhet das Hauptargument des Beweises am Ende auf einem unerwiesenen Saze. Dies ist allein schon hinreichend, das Urtheil zu begründen, daß von einer eigentlichen Vergleichung beyder in Absicht auf ihren Werth, und mithin auch von einer Wahl zwischen beyden, vernünftiger Weise überall nicht mehr die Rede seyn könne.

Wäre daher der hier eröffnete Weg auch noch einmal so weit und beschwerlich, als er in der That ist; so würde dies doch, so lange er der einzige ist, der zum Ziele führt, ihm keineswegs zum Vorwurfe gereichen können.

Es kam hier darauf an, endlich einmal das Scandal der Vernunft aus der Geometrie wegzuschaffen, was bisher mit der lückenhaften Parallelentheorie in derselben bestanden hatte, es mochte auch kosten was es wollte, ein Scandal,

das für den Geometer in eben dem Maasse demüthigender seyn mußte, als der Idealismus für den Philosophen, in welchem die Ansprüche des ersteren auf Strenge, Evidenz und zwingende Ueberzeugungskraft der Beweise die des letzteren übersteigen. Ist es mir nun, wie ich überzeugt bin, auf dem hier betretenen Wege gelungen, dieses Scandal wegzuschaffen, so fällt der Glaube ohne überzeugende Beweise, den sogar ein Kästner, nicht nur in seiner, der Klügelischen Disfertation angehängten Epistel (*) im Jahre 1763, sondern, nach der oben (§. 107. Anm.) angeführten Stelle, selbst noch im Jahre 1797 ausdrücklich forderte, in der Geometrie von nun an schlechterdings weg, und erst dadurch erhält diese Wissenschaft, wenigstens für mich, jenen unvergleichbaren Werth, der sie über alle andere erhebt.

A n m e r k u n g 2.

Dafs alle bisherigen Sätze vom Kreise (von §. 129. bis mit auf §. 160.) sich ohne Anstand zwischen §. 96. und 97. einschalten lassen, wie auch dafs alle aus Lehrsatz 24. abgeleiteten Folgerungen, sammt allen weiter nachfolgenden, von ihm

(*) Vel haec tua scriptio — heisst es daselbst am Ende — doceat, reperiri in primis clarissimae scientiarum initiis, quae demonstrari non possint, et si non credere illa, sit desipere.

abhängigen Sätzen sich eben so unmittelbar an Lehrsatz 64. Zus. 6. anschliesen, wird kaum nöthig seyn, besonders erinnert zu werden. Ich werde nun also bey den nachfolgenden Untersuchungen die Parallelentheorie, so oft ich ihrer bedarf, als vollständig berichtigt voraussetzen können.

A u f g a b e 21.

§. 161. Durch drey Punkte, die nicht in einer geraden Linie liegen, einen Kreis zu beschreiben.

Gegeben.	Fig.	Gesucht.
Drey Punkte A, B, C.	64.	Ein Kreis, der durch die Punkte A, B, C geht.

A u f l ö s u n g.

- 1) Ziehe die Verbindungslinien A B, B C.
- 2) Halbire solche in D, E (§. 71.).
- 3) Errichte in D auf der A B die D F, in E auf der B C die G E lothrecht (§. 72.), so werden diese einander schneiden.

- 4) Aus dem Durchschnittspunkte H beschreibe mit H A einen Kreis (§. 61.), so wird dieser auch durch die Punkte B, C gehen.

B e w e i s.

1) Da (p. constr.) die geraden Linien A B, B C in B zusammenlaufen, so laufen auch die auf ihnen errichteten Lothe D F, E G zusammen (§. 110. Z. 4.); folglich muß bey H ein Durchschnitt entstehen.

2) Da (p. constr.) die Linie D F die A B, und die Linie E G die B C halbirt und lothrecht schneidet, so muß, wenn durch die Punkte A, B ein Kreis möglich ist, dessen Mittelpunkt sowohl in der D F, als in der E G (§. 132.), also in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte H, liegen.

3) Daß aber durch die Punkte A, B, C ein Kreis möglich sey, erhellet so:

(a) Da (p. constr.) $A D \stackrel{\perp}{=} D B$, $A D H \stackrel{\perp}{=} B D H \stackrel{\perp}{=} R$, auch $D H \stackrel{\perp}{=} D H$, so ist $A H \stackrel{\perp}{=} B H$ (§. 66.).

(b) Eben so ist erweislich, daß $B H \stackrel{\perp}{=} C H$; folglich ist $A H \stackrel{\perp}{=} B H \stackrel{\perp}{=} C H$ (§. 25.).

Die drey Punkte A, B, C sind also von dem Punkte H gleich weit entfernt (§. 87.); folglich liegen sie in der Peripherie eines

Kreises, der AH , BH , oder CH zum Halbmesser hat (§. 129. Z. 1.), und mithin geht ein Kreis, der mit einer dieser drey Linien, als Halbmesser, aus dem Punkte H , als Mittelpunkt beschrieben wird, auch durch die Endpunkte der beyden übrigen, folglich durch die drey Punkte A , B , C zugleich.

Zus. 1. Durch drey Punkte einer geraden Linie geht kein Kreis.

Denn lägen die Punkte A , B , C in einer geraden Linie, so wären die auf AB , BC errichteten Lothe parallel (§. 102. Zus.); folglich gäbe es keinen Durchschnitt (§. 100.), also auch keinen Mittelpunkt für einen Kreis.

Zus. 2. Durch drey Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, ist also ein Kreis vollständig bestimmt, indem dadurch zugleich sein Mittelpunkt und sein Halbmesser, also seine Lage und seine Quantität gegeben ist (§. 129. Z. 6.).

Zus. 3. Durch drey Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, geht also nur ein Kreis. Denn das Gegentheil wäre gegen Zus. 2, also unmöglich.

Zus. 4. Durch die Winkelspizen eines jeden Dreyecks läßt sich also ein Kreis beschreiben,

von welchem jede der Seiten des Dreyecks eine Sehne wird.

Zus. 5. Lothe, die man in der Mitte der drey Seiten eines Dreyecks aufrichtet, durchschneiden sich also alle drey in einem Punkte, nämlich in dem Mittelpunkte des Kreises, der durch die Winkelspizen des Dreyecks geht (Zus. 4.).

A u f g a b e 22.

§. 162. Einen Kreis zu beschreiben, von welchem ein Abschnitt gegeben ist.

Gegeben.	Fig.	Gesucht.
Ein Kreisabschnitt D A B.	65. a. b. c.	Der Mittelpunkt des Kreises, dem der Abschnitt D A B zugehört.

Auflösung und Beweis.

1) Halbire die Grundlinie A B in dem Punkte E (§. 71.).

2) Errichte in dem Punkte E auf der A B das Loth E D (§. 72.).

3) Ziehe A D, so ist

$A D E = D A E$, oder

$A D E > D A E$, oder

$A D E < D A E$.

I. F a l l.

Fig. 65. a.

Wenn $A D E = D A E$, so ist $A E = D E$ (§. 68.). Da nun (p. constr.) auch $A E = E B$, so gehen von dem Punkte E drey gleiche gerade Linien E A, E D, E B an den Kreis, von welchem der Abschnitt D A B genommen ist, folglich ist E dessen Mittelpunkt (§. 136. Z. 4.).

II. u. III. F a l l.

Fig. 65. b. c.

Wenn $A D E > D A E$ oder $A D E < D A E$; so mache an dem Punkte A der Linie D A den Winkel $D A C = A D E$ (§. 85.), verlängere D E, bis sie der A C in C begegnet, welches (§. 80. Z. 4. und §. 107.) nothwendig erfolgen muß; und ziehe B C.

Da nun (p. constr.) $D A C = A D C$, so ist $A C = D C$ (§. 68.). Nun ist auch $A E = E B$ (p. constr.) und $A E C =$

$C E B$, auch $C E = C E$, folglich $A C = B C$ (§. 66.). Demnach gehen von dem Punkte C drey gleiche gerade Linien CA , CD , CB an den Kreis, dem der gegebene Abschnitt $D A B$ zugehört, und mithin ist C dessen Mittelpunkt (§. 136. Z. 4.).

Zus. Hieraus erhellet, daß ein Kreisabschnitt entweder ein Halbkreis, oder grösser, oder kleiner, als der Halbkreis sey, je nachdem des Kreises Mittelpunkt entweder in seine Grundlinie, oder innerhalb, oder ausserhalb desselben fällt.

Lehrsatz 65.

§. 163. Im Kreise ist der Mittelpunktswinkel doppelt so groß, als der Peripheriewinkel, der mit ihm auf einerley Bogen steht.

Hypoth.	Fig.	Satz.
In dem $\odot D A B$ stehen der Mittelpunktswinkel $B C D$ und der Peripheriewinkel $B A D$ auf einerley Bogen $B D$.	66. a. b. c.	Es ist $B C D = 2 B A D$.

I. F a l l.

Fig. 66. a.

Die Schenkel $C B$, $C D$ des Mittelpunktswinkels werden von den Schenkeln $A B$, $A D$ des Peripheriewinkels eingeschlossen.

Vorbereitung.

Ziehe aus A durch den Mittelpunkt C die Linie $A C E$.

B e w e i s.

1) Da sowohl $C A B = C B A$, als $C A D = C D A$ (§. 67.), so ist $B A C + C A D = B A D$ $\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} = C B A + C D A$ (§. 28.), und mithin $B A D + C B A + C D A = 2 B A D$.

2) Da $B C E = C B A + B A C$, und $E C D = C D A + C A D$ (§. 97. Z. 1.), so ist $B C E + E C D = C B A + C D A + B A D$ $\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} = C B A + C D A + B A D$ (§. 28.).

3) Da nun (p. dem. 1.) $B A D + C B A + C D A = 2 B A D$, aber (p. dem. 2.) $B C D = B A D + C B A + C D A$, so ist auch $B C D = 2 B A D$ (§. 25.).

II. F a l l.

Eig. 66. b.

Die Schenkel des Mittelpunktswinkels werden von den Schenkeln des Peripheriewinkels nicht eingeschlossen, sondern der eine von den letztern, AB , geht selbst durch den Mittelpunkt.

B e w e i s.

Da $\angle BCD = \angle CAD + \angle CDA$ (§. 97. Z. 1.),
aber $\angle CAD = \angle CDA$ (§. 67.), weil $CA = CD$ (p. def.), so ist auch $\angle BCD = 2 \angle CAD = 2 \angle BAD$.

III. F a l l.

Fig. 66. c.

Ein Schenkel des Peripheriewinkels, AB , schneidet einen Schenkel des Mittelpunktswinkels, CD in dem Punkte E .

V o r b e r e i t u n g.

- 1) Ziehe CA .
- 2) An dem Punkte D der Linie AD mache den Winkel $\angle ADF = \angle EAD$ (§. 85.).

B e w e i s.

1) Da $CAD = CDA$ (§. 67.), aber $CAD > EAD$ (§. 24.), so ist auch $CDA > EAD$ (§. 35.).

2) Da nun (p. constr.) $FDA = EAD$, so ist auch $FDA < CDA$ (§. 34.).

3) Nun sind schon $CAD + CDA < 2R$ (§. 80. Z. 5.), aber (p. dem. 1.) ist $EAD < CAD$, und (p. dem. 2.) $FDA < CDA$, folglich sind $EAD + FDA < CAD + CDA$, also noch vielmehr $EAD + FDA < 2R$ (§. 37.), und mithin muß die DF die AE in F schneiden (§. 107.).

4) Nun ist $EFD = FAD + FDA$ (§. 97. Z. 1.) $= 2FAD$, (weil (p. constr.) $FDA = FAD$) $= 2BAD$.

5) Da nun $CAD = CDA$ (§. 67.), aber $FAD = FDA$ (p. constr.); so ist auch

$$\left. \begin{array}{l} CAD - FAD \\ \quad BAC \end{array} \right\} = \left(\begin{array}{l} CDA - FDA \\ \quad EDF \end{array} \right. \text{ (§. 29.).}$$

6) Da nun $CBA = BAC$ (§. 67.), so ist auch $CBA = EDF$ (§. 25.).

7) Da aber ferner auch $B E C = D E F$ (§. 77.), so ist auch $B C D = E F D$ (§. 97. Z. 3.).

8) Da endlich (p. dem. 4.) $E F D = \sphericalangle B A D$, so ist auch $B C D = \sphericalangle B A D$.

A n m e r k u n g.

Ich habe für den ersten und dritten Fall die von Clavius gegebenen Beweise den Euklidischen vorgezogen, weil die letzteren ein Paar arithmetische Sätze voraussetzen, die sich nicht füglich unter die Axiome bringen liessen.

L e h r s a z 66.

§. 164. Die Winkel in einerley Kreisabschnitte sind einander gleich.

Hypoth.	Fig.	Satz.
$B A D, B E D$ sind	67. a. b.	Es ist $B A D =$
Winkel in dem		$B E D$.
Kreisabschnitte		
$A B D$.		

I. F a l l.

Fig. 67. a.

Die Winkel $B A D, B E D$ sind in dem grösseren Kreisabschnitte $A B D$.

V o r b e r e i t u n g.

Nimm des Kreises Mittelpunkt C (§. 133.) und ziehe C B, C D.

B e w e i s.

Da der Mittelpunktswinkel B C D mit den Peripheriewinkeln B A D, B E D auf einerley Bogen B F D steht, so ist $B C D = 2 B A D = 2 B E D$ (§. 163.), folglich auch $B A D = B E D$ (§. 27.).

II. F a l l.

Fig. 61.

Die Winkel sind im Halbkreise.

B e w e i s.

Da (§. 160. Z. 1.) jeder Winkel im Halbkreise ein rechter ist, alle rechte Winkel aber einander gleich sind (§. 74.); so sind auch alle Winkel im Halbkreise einander gleich.

III. F a l l.

Fig. 67. b.

Die Winkel B A D, B E D sind in dem kleineren Kreisabschnitte A B D.

Vorbereitung.

- 1) Nimm des Kreises Mittelpunkt C (§. 133.).
- 2) Ziehe die A C, und verlängere sie bis nach E.
- 3) Ziehe ferner die E F, B F, D F.

Beweis.

1) Da (p. constr.) A F des Kreises Durchmesser ist, so ist D B F der gröfsere Kreisabschnitt (§. 162. Zus.)

2) In dem Abschnitte D B F sind die Winkel B A F, B E F (§. 130.); folglich ist $B A F = B E F$ nach dem I. Falle.

3) Da A F des Kreises Durchmesser ist, so ist auch B D F der gröfsere Kreisabschnitt (§. 162. Zus.).

4) In dem Abschnitte B D F aber sind die Winkel F A D, F E D (§. 130.); folglich ist $F A D = F E D$ nach dem I. Falle.

5) Da nun $B A F = B E F$ (p. dem. 2.) und $F A D = F E D$ (p. dem. 4.); so ist auch

$$\left. \begin{array}{l} B A F + F A D \\ B A D \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} B E F + F E D \\ B E D \end{array} \right\} \quad (\S. 28.)$$

Lehrsatz 67.

§. 165. Die Gegenwinkel der vierseitigen Figuren im Kreise sind zwey rechten gleich.

Fig.

Hypoth.

67. h.

Satz.

EBFD ist eine vierseitige Figur im $\odot$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Es ist } \angle EBF + \angle EDF \\ \angle BED + \angle BFD \end{array} \right\} = 2R.$$

DEBE.

Vorbereitung.

Ziehe die Diagonalen EF, BD.

Beweis:

1) Es ist $\angle DBE = \angle DFE$, und

$\angle DBF = \angle FED$ (§. 164.); folglich

$$\left. \begin{array}{l} \angle DBE + \angle DBF \\ \angle EBF \end{array} \right\} = \angle DFE + \angle FED \quad (\S. 28.).$$

2) Es ist auch $\angle EDF = \angle EDF$, folglich $\angle EBF + \angle EDF = \angle DFE + \angle FED + \angle EDF$ (§. 28.).

3) Aber $\angle DFE + \angle FED + \angle EDF = 2R$ (§. 97.), folglich auch $\angle EBF + \angle EDF = 2R$.

4) Eben so ist erweislich, dass auch $\angle BED + \angle BFD = 2R$ sey.

Z u s. 1. Wird also an einer vierseitigen Figur im Kreise eine Seite verlängert, so ist der so entstehende äussere Winkel dem Gegenwinkel seines Nebenwinkels gleich (§. 25.); denn beyde sind mit diesem Nebenwinkel zusammen $\equiv 2 R$ (Lehrs. 67. §. 75.).

Z u s. 2. Der Winkel $B A F$ (F. 67. b.) im grösseren Kreisabschnitte $D B F$ ist kleiner, hingegen der Winkel $B G F$ im kleineren Kreisabschnitte $G B F$ ist grösser, als ein rechter. Denn da der Winkel im Halbkreise $A B F \equiv R$ (§. 160. Z. 1.), so ist $B A F < R$ (§. 80. Z. 4.), folglich $B G F > R$ (Lehrs. 67.)

L e h r s a z. 68.

§. 166. Wenn durch den Berührungspunkt einer Tangente eine Sehne geht, so sind die Winkel, welche sie mit der Tangente macht, den Winkeln in den entgegengesetzten Kreisabschnitten gleich.

Hypoth.	Fig.	Satz.
1) $E F$ ist eine Tangente des $\odot A B C$ für den Punkt B .	68.	Es ist $D B F \equiv B A D$, u. $D B E \equiv D C B$.
2) Durch den Berührungspunkt B geht die Sehne $B D$.		

V o r b e r e i t u n g.

1) In dem Punkte B errichte auf der E F das Loth B A (§. 72.).

2) Ziehe die A D.

3) In dem Bogen B D nimm nach Willkühr den Punkt C an, und ziehe die C B, C D.

B e w e i s.

1) In dem Lothe B A liegt des Kreises Mittelpunkt (§. 147. Z. 4.), folglich ist B A ein Durchmesser (§. 59.); also C A B ein Halbkreis (§. 134. Z. 1.) und A D B ein Winkel im Halbkreise (§. 130.), mithin $A D B = R$ (§. 160. Z. 1.).

2) Da $A D B = R$ (p. dem. 1.) so ist auch $B A D + A B D = R$ (§. 97. Z. 6.).

3) Es ist aber auch (p. constr.) $A B F$, d. i. $A B D + D B F = R$.

4) Demnach ist $B A D + A B D = A B D + D B F$ (p. dem. 2. 3. §. 25.), und mithin $B A D = D B F$ (§. 29.).

5) Da nun $B A D + B C D = 2 R$ (§. 165.), so ist auch $D B F + B C D = 2 R$ (p. dem. 4) $= D B F + D B E$

Z u s. 1. Wird also an einer vierseitigen Figur im Kreise eine Seite verlängert, so ist der so entstehende äussere Winkel dem Gegenwinkel seines Nebenwinkels gleich (§. 25.); denn beyde sind mit diesem Nebenwinkel zusammen $\equiv 2 R$ (Lehrs. 67. §. 75.).

Z u s. 2. Der Winkel $B A F$ (F. 67. b.) im grösseren Kreisabschnitte $D B F$ ist kleiner, hingegen der Winkel $B G F$ im kleineren Kreisabschnitte $G B F$ ist grösser, als ein rechter. Denn da der Winkel im Halbkreise $A B F \equiv R$ (§. 160. Z. 1.), so ist $B A F < R$ (§. 80. Z. 4.), folglich $B G F > R$ (Lehrs. 67.)

L e h r s a z. 68.

§. 166. Wenn durch den Berührungspunkt einer Tangente eine Sehne geht, so sind die Winkel, welche sie mit der Tangente macht, den Winkeln in den entgegengesetzten Kreisabschnitten gleich.

Hypoth.

Fig.

Saz.

- 1) $E F$ ist eine Tangente des $\odot A B C$ für den Punkt B . 68. Es ist $D B F \equiv B A D$, u. $D B E \equiv D C B$.
- 2) Durch den Berührungspunkt B geht die Sehne $B D$.

V o r b e r e i t u n g.

1) In dem Punkte B errichte auf der E F das Loth B A (§. 72.).

2) Ziehe die A D.

3) In dem Bogen B D nimm nach Willkühr den Punkt C an, und ziehe die C B, C D.

B e w e i s.

1) In dem Lothe B A liegt des Kreises Mittelpunkt (§. 147. Z. 4.), folglich ist B A ein Durchmesser (§. 59.); also C A B ein Halbkreis (§. 134. Z. 1.) und A D B ein Winkel im Halbkreise (§. 130.), mithin $A D B = R$ (§. 160. Z. 1.).

2) Da $A D B = R$ (p. dem. 1.) so ist auch $B A D + A B D = R$ (§. 97. Z. 6.).

3) Es ist aber auch (p. constr.) $A B F$, d. i. $A B D + D B F = R$.

4) Demnach ist $B A D + A B D = A B D + D B F$ (p. dem. 2. 3. §. 25.), und mithin $B A D = D B F$ (§. 29.).

5) Da nun $B A D + B C D = 2 R$ (§. 165.), so ist auch $D B F + B C D = 2 R$ (p. dem. 4) $= D B F + D B E$

(§. 75.) ; und mithin $B C D = D B E$
(§. 29.).

A u f g a b e 23.

§. 167. Von einem gegebenen Kreise einen Abschnitt abzuschneiden, der einen Winkel enthält, welcher einem gegebenen geradlinigen Winkel gleich sey.

Gegeben.	Fig.	Gesucht.
Der Kreis $D B C$ u. der geradlinige Winkel G .	68.	Ein Abschnitt von dem $\odot D B C$, der einen Winkel $= G$ enthält.

A u f l ö s u n g.

1) Ziehe an einen Punkt B des $\odot D B C$ die Tangente $E F$ (§. 149).

2) An dem Punkte B der Linie $E F$ mache den Winkel $D B F = G$ (§. 85.).

3) Nimm in der Peripherie jenseits der Sehne $B D$ einen Punkt A an, und ziehe $A B$, $A D$.

B e w e i s.

Da (p. constr.) $D B F = G$, aber $D B F = B A D$ (§. 166.); so ist auch $B A D = G$

(§. 25.), und mithin hat der Abschnitt A B D die verlangte Eigenschaft.

A u f g a b e 24.

§. 168. Auf einer gegebenen geraden Linie einen Kreisabschnitt zu beschreiben, der einen Winkel enthält, welcher einem gegebenen geradlinigen Winkel gleich sey.

Gegeben.

Fig.

Gesucht.

1) Die gerade Linie A B.

69. a. b. c.

Ein Kreisabschnitt über

2) Der geradlinige Winkel H.

A B, der einen Winkel $= H$ enthält.

I. F a l l.

Fig. 69. a.

Wenn $H = R$ ist.

Auflösung und Beweis.

1) Halbire A B in C (§. 71.).

2) Aus C beschreibe mit A C den Halbkreis D A B, welcher die verlangte Eigenschaft hat (§. 160. Z. 1.).

II. F a l l.

Fig. 69. b. c.

Wenn nicht $H = R$, also entweder $H > R$ oder $H < R$ ist.

A u f l ö s u n g.

1) Mache an dem Punkte A der Linie A B den Winkel $B A E = H$ (§. 85.).

2) In dem Punkte A errichte auf A E das Loth A G (§. 72.).

3) Halbire die A B in dem Punkte F (§. 71.).

4) In dem Punkte F errichte auf A B das Loth F C (§. 72.), welches die A G irgendwo in C schneiden wird (§. 107.).

5) Aus C beschreibe mit C A den $\odot$ A G D.

V o r b e r e i t u n g.

Ziehe C B.

B e w e i s.

1) Da (p. constr.) $A F = F B$, $A F C = C F B$, auch $C F = C F$, so ist $A C = C B$ (§. 66.).

2) Demnach geht ein Kreis, aus C mit C A beschrieben, auch durch B, und es ist also D A B ein Kreisabschnitt über A B.

3) Da nun für den Punkt A des Kreisbogens A D B die Linie A E eine Tangente ist (§. 164. Z.); so ist D A B ein Kreisabschnitt, welcher einen Winkel enthält, der $\equiv$ B A E ist (§. 166.).

4) Da nun (p. constr.) B A E $\equiv$ H, so ist auch der in dem Kreisabschnitte D A B enthaltene Winkel $\equiv$ H (§. 25.), und mithin hat dieser Abschnitt die verlangte Eigenschaft.

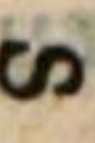
Lehrsatz 69.

§. 169.. Aehnliche Kreisabschnitte über gleichen Grundlinien sind congruent.

Hypoth.

Fig.

Satz.

1) Segm. C A B 

70.

Segm. C A B $\stackrel{S}{\equiv}$

Segm. D E F.

Segm. D E F.

Vorbereitung.

Bringe den Abschnitt D E F über den Abschnitt C A B so, daß E auf A und E F längs der A B zu liegen komme.

B e w e i s.

1) Weil (p. hyp.) $AB = EF$, so muß der Punkt F auf den B fallen, also die Linie EF die AB decken (§. 41. Z. 4.).

2) Nun deckt auch der Bogen EDF den ACB, oder nicht. Wäre das letztere, so könnten diese beyden Bogen, sich, ausser den zusammenfallenden Punkten A u. E, B u. F, nicht noch in einem dritten Punkte schneiden (§. 137. Z. 4.); folglich müßte der eine, etwa EDF, ganz innerhalb des andern ACB fallen.

3) Wollte man aber dies annehmen, so hätte man, wenn man noch BDC, AC, AD zieht, $ADB = ACD$ (§. 130.), wider §. 78. welches unmöglich ist.

4) Folglich muß man das erste annehmen, daß auch der Bogen EDF den ACB decke, während die Grundlinie EF die AB deckt.

5) Ist aber dies, so sind die Kreisabschnitte CAB, DEF congruent (§. 20.).

L e h r s a z. 70.

§. 170. In gleichen Kreisen (also auch in einerley Kreise) stehen gleiche Mittel-

punktswinkel auf gleichen Bogen, und auf gleichen Bogen gleiche Mittelpunktswinkel.

I. T h e i l.

Hypoth.	Fig.	Satz.
Es ist $A C B = E D F$	71.	Es ist Arc. $A K B =$ $=$ Arc. $E L F$.

V o r b e r e i t u n g.

- 1) Ziehe $A B$, $E F$.
- 2) Alsdann nach Willkühr: $A G$, $A K$, $E H$, $E L$.
- 3) Verbinde $B G$, $B K$, und $F H$, $F L$.

B e w e i s.

- 1) Da (p. hyp.) $A C B = E D F$, und (p. def.) $A C = D E$, $C B = D F$, so ist $A B = E F$ (§. 66.).
- 2) Da (p. hyp.) $A C B = E D F$, so ist auch $A G B = E H F$ (§. 163. 27.).
- 3) Da $A G B = E H F$ (p. dem. 2.), aber $A G B + A K B = 2 R$, und $E H F + E L F = 2 R$ (§. 165.), so ist auch $A K B = E L F$ (§. 29.).
- 4) Da $A B = E F$ (p. dem. 1.), $A G B = E H F$ (p. dem. 2.), und $A K B = E L F$

(p. dem. 3.); so sind die Kreisabschnitte auf beyden Seiten von $A B$ und $E F$ congruent (§. 130. 169.), folglich die Bogen $A K B$, $E L F$ gleich (§. 40.).

II. T h e i l.

Hypoth.

Saz.

Es ist Arc. $A K B$
 $=$ Arc. $E L F$.

Es ist $A C B = E D F$.

B e w e i s.

Wären die Winkel $A C B$, $E D F$ ungleich, so müßte der eine grösser, als der andere seyn. Wäre also $A C B > E D F$, so sey $A C M = E D F$, alsdann wäre, n. I. Theil, Arc. $A K M =$ Arc. $E L F =$ Arc. $A K B$ (p. hyp.) wider §. 24.), welches unmöglich ist. Da nun eben so erweislich ist, daß auch nicht $E D F > A C B$ seyn könne, so muß $A C B = E D F$ seyn (§. 22.).

Z u s. Der Saz gilt auch von Peripheriewinkeln vermöge §. 136. 26.

L e h r s a z. 71.

§. 171. In gleichen Kreisen (also auch in einerley Kreise) schneiden gleiche Seh-

nen gleiche Bogen ab, und: Sehnen, welche gleiche Bogen abschneiden, sind gleich.

F i g.

71.

I. T h e i l.

Hypoth.

Saz.

Es ist $AB = EF$.

Es ist $\text{Arc. } AKB = \text{Arc. } ELF$.

V o r b e r e i t u n g.

- 1) Nimm die Mittelpunkte C, D (§. 133.).
- 2) Ziehe die Halbmesser CA, CB, DE, DF.

B e w e i s.

Da (p. hyp.) $AB = EF$, und (p. def.) $AC = DE$, $CB = DF$, so ist $ACB = EDF$ (§. 69.); folglich $\text{Arc. } AKB = \text{Arc. } ELF$ (§. 170.).

II. T h e i l.

Hypoth.

Saz.

$\text{Arc. } AKB = \text{Arc. } ELF$.

Es ist $AB = EF$.

ELF .

B e w e i s.

Da (p. hyp.) $\text{Arc. } AKB = \text{Arc. } ELF$, so ist $ACB = EDF$ (§. 170.). Da nun auch

$AC = DE$, $BC = DF$ (p. def.), so ist
 $AB = EF$ (§. 66.).

A u f g a b e 25.

§. 172. Einen gegebenen Kreisbogen zu halbiren.

Gegeben.	Fig.	Gesucht.
Ein Kreisbogen ADB.	65. a.	Der Punkt D, welcher den Bo- gen A D B hal- birt.

A u f l ö s u n g.

- 1) Ziehe die Sehne A B.
- 2) Halbire A B in E (§. 71.).
- 3) Errichte in E auf der A B das Loth E D (§. 72.), so wird der Bogen A D B durch den Punkt D halbirt.

V o r b e r e i t u n g.

Ziehe A D, D B.

B e w e i s.

Da (p. constr.) $AE = EB$, $AED = DEB$, auch $DE = DE$, so ist $AD = DB$ (§. 66.), folglich auch $\text{Arc. } AD = \text{Arc. } DB$.

D B; (§. 171.) und mithin der Bogen A D B in D halbart.

Zus. 1. Jede gerade Linie also, die auf der Sehne eines Kreisbogens in deren Mitte lothrecht ist, halbart den Kreisbogen.

Zus. 2. Eben so halbart jeder Halbmesser, der auf einer Sehne lothrecht ist, den Bogen dieser Sehne. Denn ist (F. 65. b.) der Halbmesser C D auf der Sehne A B lothrecht, so geht er durch ihre Mitte E (§. 132.), und mithin folgt das übrige aus Zus. 1.

Zus. 3. Jeder Halbmesser, der einen Kreisbogen halbart, halbart auch dessen Sehne, und ist auf ihr lothrecht. Denn wird N H Q (F. 72.) von dem Halbmesser C H halbart, also $NH = HQ$ gemacht, so ist $NCH = HCQ$ (§. 170.).

Da nun auch $CN = CQ$ (p. def.) und $CG = CG$, so ist $NG = GQ$ und $CGN = CGQ$ (§. 66.) $= R$ (§. 57.).

L e h r s a z 72.

§. 173. Wenn eine Kreislinie von zwey Parallelen durchschnitten wird, so sind die zwischen ihnen eingeschlossenen Kreisbogen gleich.

Hypoth.

Fig.

Saz.

Es ist $AB \parallel DE$.

72.

Es ist $\text{Arc. } MN =$

$\text{Arc. } PQ.$

Y

Vorbereitung.

1) Nimm des Kreises Mittelpunkt C (§. 133.).

2) Von C aus fälle auf die A B das Loth C F (§. 73.).

3) Verlängere C F bis nach G, H.

Beweis.

1) Die Stücke M P, N Q der Parallelen A B, D E, welche innerhalb der Kreislinie liegen, sind Sehnen des Kreises (§. 130.).

2) Da (p. hyp.) $AB \parallel DE$, und (p. constr.) die C H in F auf der A B lothrecht ist, so ist sie auch in G auf der D E lothrecht. (§. 110. Z. 1.).

3) Demnach werden von der C H sowohl die Sehnen M P, N Q, als die ihnen zugehörige Bogen M H P, N H Q halbt (§. 132. 172. Z. 1.).

4) Da nun (p. dem. 3.) $MH = HP$, u. $NH = HQ$, so ist

$$\text{auch } \left(\begin{array}{c} M H - N H \\ M N \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} H P - H Q \\ P Q \end{array} \right) \text{ (§. 29.).}$$

Zus. 1. Auch wenn eine Tangente D E (F. 73.) mit einer Sehne A B parallel läuft, sind die Bogen F G, F H zwischen der Sehne A B

und dem Berührungspunkte F einander gleich. Denn der Halbmesser C F steht auf der Tangente D E in dem Berührungspunkte F (§. 147. Z. 3.), folglich auch auf der ihr parallelen Sehne G H in I (§. 110. Z. 1.) lothrecht, und halbirte also den Bogen derselben (§. 172. Z. 2.), so daß $F G = F H$ ist.

Zus. 2. Auch wenn zwey gleiche Kreislinien von zwey Parallelen durchschnitten werden, deren eine durch ihre Mittelpunkte geht, sind die zwischen beyden eingeschlossenen Bogen gleich.

Denn ist (F. 74.) $D F \perp A B$, so steht D F von allen Punkten der A B, also auch von den beyden Mittelpunkten C, E gleich weit ab (§. 111.). Demnach ist $D G = H F$ (§. 135. Z.); folglich auch $D P G = H Q F$ (§. 171.). Es ist aber auch $A P M = B Q N$ (§. 27. 134. Z. 1.), und mithin $A P M - D P G = B Q N - H Q F$ (§. 29.), d. i. $A D + G M = H N + B F$. Da nun $A D = G M$, und $H N = B F$ (Lehrs. 72.), so ist $A D = G M = H N = B F$.

Zus. 3. Die ähnlich liegenden Theile zweyer gleichen Kreislinien schneiden von allen Parallelen ihrer Centrallinie gleiche Stücke ab.

Denn, ist (F. 74.) $D F \perp A B$, so ist $C K = E L$ (§. 111.). Da nun deswegen auch $D G = H F$

(§. 135. Z.), aber $\left. \begin{array}{l} DK \\ KG \end{array} \right\} = \frac{1}{2} DG, \text{ u. } \left. \begin{array}{l} HL \\ LF \end{array} \right\} = \frac{1}{2} HF$

(§. 132.), so ist auch $DK = KG = HL = LF$;

Folglich $\left. \begin{array}{l} KL - HL \\ KH \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} KL - KG \\ GL \end{array} \right\} \quad (\S. 29.), \text{ u. mit-}$

hin $\left. \begin{array}{l} DK + KH \\ DH \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} GL + LF \\ GF \end{array} \right\} \quad (\S. 28.).$

Zus. 4. Zwey Tangenten, welche durch die Endpunkte eines Durchmesfers gehen, sind parallel. Denn sie sind beyde auf dem Durchmesser lothrecht (§. 147. Z. 2.).

Zus. 5. Sind zwey Tangenten eines Kreises parallel, so ist die gerade Linie durch die Berührungspunkte ein Durchmesser.

Denn ein Durchmesser nach dem einen Berührungspunkte gezogen, steht auf der durch diesen Punkt gehenden Tangente, folglich auch auf der andern, mit ihr parallelen lothrecht (§. 147. Z. 3. §. 110. Z. 1.), und muß daher auch durch den Berührungspunkt von dieser gehen.

Zus. 6. Zwey Tangenten durch die Endpunkte einer Sehne, die kein Durchmesser ist, gezogen, treffen, verlängert zusammen. Denn zieht man aus dem Mittelpunkte an die Endpunkte der Sehne die Halbmesser, so machen diese mit den beyden Tangenten rechte (§. 147. Z. 3.), mit der Sehne aber spize Winkel (§. 80.).

Nun sind die Winkel, welche die Halbmesser mit den Tangenten machen, größer, als die Winkel, welche die Tangenten mit der Sehne machen (§. 24.); folglich sind die letzteren spitz (§. 57.), und mithin treffen die Tangenten verlängert an dieser Seite zusammen (§. 107.).

Zus. 7. Wenn zwey Tangenten einander schneiden, so ist die gerade Linie durch ihre Berührungspunkte eine Sehne, die kleiner als der Durchmesser ist.

Denn wäre die Sehne durch die Berührungspunkte ein Durchmesser, so wären die Tangenten auf ihr lothrecht (§. 147. Z. 2.), also parallel (§. 102. Z.), und mithin schnitten sie einander nicht (§. 100.), gegen die Voraussetzung, welches unmöglich ist.

L e h r s a z 73.

§. 174. Wenn zwey Bogen einer Kreislinie einander gleich sind, so sind die Sehnen, welche, durch die übereinstimmenden Endpunkte beyder gehen, parallel; diejenigen hingegen, welche durch die entgegengesetzten Endpunkte beyder gehen, durchschneiden einander so, daß die ähnlich liegenden Theile beyder gleich sind, und wenn die Sehnen der beyden gleichen Bogen sich

ausserhalb des Kreises schneiden, so sind ihre ausserhalb des Kreises liegenden Abschnitte einander gleich.

Hypoth.	Fig.	Saz.
1) Es ist Arc. MN =	72.	1) Es ist MP #
Arc. PQ.		NQ.

2) Die Sehnen MP, NQ verbinden die übereinstimmenden Endpunkte der Bogen MN, PQ.	2) MQ, NP schneiden einander so, dass MI = IP, u. NI = IQ ist.
--	--

3) Die Sehnen MQ, NP verbinden die entgegengesetzten	3) Es ist NO =
Endpunkte der Bogen MN, PQ.	QO.

4) Man gedenkt sich einen Punkt O, in welchem die Sehnen der gleichen Bogen MN, PQ verlängert zusammentreffen.

Vorbereitung.

1) Nimm des Kreises Mittelpunkt C (§. 133.).

2) Von C aus fälle auf die N Q das Loth C G (§. 73.).

3) Verlängere C G bis nach H.

B e w e i s.

I. T h e i l.

1) Da die C G von dem Mittelpunkte C aus auf der N Q lothrecht ist, so wird die N Q von der C G in G, und mithin der Bogen N H Q von der C H in H halbirt (§. 132. 172. Z. 1.), und es ist also $\text{Arc. N H} = \text{Arc. H Q}$.

2) Da (p. dem. 1.) $\text{Arc. N H} = \text{Arc. H Q}$, und (p. hyp.) $\text{Arc. M N} = \text{Arc. P Q}$, so ist

$$\left. \begin{array}{l} \text{M N} + \text{N H} \\ \text{M H} \end{array} \right\} = \left(\begin{array}{l} \text{H Q} + \text{P Q} \\ \text{H P} \end{array} \right. \quad (\S. 28.);$$

es wird also auch der Bogen M H P durch den Halbmesser C H in H halbirt, folglich ist C H auf dessen Sehne M P in F lothrecht (§. 172. Z. 3.).

3) Da nun (p. dem. 1. 2.) die C H auf den beyden M P, N Q lothrecht ist, so ist M P $\parallel$ N Q (§. 102. Z.).

II. T h e i l.

1) Da (p. hyp.) die Sehnen M Q, N P die entgegengesetzten Endpunkte der glei-

chen Bogen $M N$, $P Q$ verbinden, so müssen sie einander in I durchschneiden (§. 55. Z. 3.).

2) Da (p. hyp.) $\text{Arc. } M N = \text{Arc. } P Q$ auch $N H Q = N H Q$, so ist

$$\left. \begin{array}{l} M N + N H Q \\ M H Q \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} N H Q + P Q \text{ (§. 28.)} \\ N H P \end{array} \right.$$

und mithin $M Q = N P$ (§. 171.).

3) Da auch $M N = P Q$ (§. 171.), weil (p. hyp.) $\text{Arc. } M N = \text{Arc. } P Q$, und $M P = M P$, so ist $\triangle M N P \cong \triangle M Q P$ (§. 69.) und mithin $Q M P = N P M$, also auch $I M = I P$, (§. 68.).

4) Da (p. dem. 2.) $M Q = N P$, und

(p. dem. 3.) $I M = I P$, so ist auch

$$\left. \begin{array}{l} M Q - I M \\ I Q \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} N P - I P \\ I N \text{ (§. 29.)} \end{array} \right.$$

III. T h e i l.

Da (p. hyp.) die Sehnen der gleichen Bogen $M N$, $P Q$ einander ausserhalb des Kreises in einem Punkte O schneiden, so ist, weil n. d. II. Th. d. Bew. $N M P = Q P M$, aber $O N Q = N M P$, und $O Q N = Q P M$

(§. 110.), wegen des im I. Th. bewiesenen Parallelismus der Linien NQ , MP , auch $ONQ = OQN$ (§. 25.), und mithin $ON = OQ$ (§. 68.).

Zus. 1. Der Durchschnittspunkt I der Sehnen MG , NP , welche die entgegengesetzten Endpunkte der gleichen Bogen MN , PQ verbinden, liegt immer in dem Halbmesser, der die Bogen MHP , NHQ halbirt. Denn da (n. d. II. Th. d. Bew.) das Dreyeck MIP gleichschenkelig ist, so liegt seine Spitze in dem Halbmesser CH , welcher auf der Grundlinie in ihrer Mitte lothrecht steht (§. 80. Z. 5.).

Zus. 2. Die gerade Linie, welche die Punkte H , I verbindet, geht immer durch des Kreises Mittelpunkt (§. 45.).

Zus. 3. Zwey Sehnen, welche durch einen Punkt I eines Halbmessers so gehen, daß sie mit demselben gleiche Winkel machen, schneiden gleiche Kreisbogen ab.

Zus. 4. Der Durchschnittspunkt O der Sehnen von den gleichen Kreisbogen MN , PQ , welche einander ausserhalb des Kreises schneiden, liegt immer in der Verlängerung des Halbmessers CH , der die Bogen MHP , NHQ halbirt. Denn da (n. d. III. Th. d. Bew.) das Dreyeck MOP gleichschenkelig ist, so folgt das übrige wie in Zus. 1.

Zus. 5. Die gerade Linie, welche den Winkel an dem Durchschnittspunkte O der beyden verlängerten Sehnen halbirt, geht durch die Mitte der Sehnen NQ , MP , und durch den Mittelpunkt des Kreises.

Zus. 6. Zwey gerade Linien, welche die Kreislinie durchschneiden, und einem verlängerten Halbmesser in einem Punkte O unter gleichen Winkeln begegnen, schneiden gleiche Kreisbogen ab.

Zus. 7. Nimmt man auf beyden Seiten des Berührungspunkts F der Tangente DE (F. 73.) gleiche Bogen FG , FH , so ist die Sehne durch ihre Endpunkte, GH , der Tangente DE parallel. Denn zieht man nach dem Berührungspunkte F den Halbmesser CF , so halbirt er den Bogen $G F H$, folglich auch die Sehne GH , und ist auf dieser lothrecht (§. 172. Z. 3.). Da er nun auch auf der Tangente lothrecht ist (§. 147. Z. 3.), so ist die Sehne GH der Tangente DE parallel (§. 102. Zus.).

III. Von der Gleichheit der Flächen geradliniger Figuren.

L e h r s a z 74.

§. 175. Parallelogramme auf einerley oder gleichen Grundlinien und zwischen einerley Parallelen (von einerley Höhe) sind einander gleich.

I. T h e i l.

Hypoth.

Saz.

Die Parallelogramme AD, AF sind auf einerley Grundlinie AB und zwischen einerley Parallelen AB, CF .

Es ist $AD = AF$.

B e w e i s.

I. F a l l.

Fig. 75. a.

Die der Grundlinie AB gegenüberliegende Seiten CD, DF haben einerley Endpunkt

zwischen einerley

Parallelen A F, D G.

Vorbereitung.

Ziehe die Verbindungslinien A H, B G.

Beweis.

Die Linien A H, B G bilden mit den beyden A B, G H ein drittes Parallelogramm A G (§. 115.), welches (n. d. I. Thl.) wegen der gemeinschaftlichen Grundlinie A B dem A C, und wegen der gemeinschaftlichen Grundlinie G H dem E G gleich ist; folglich ist auch $A C = E G$ (§. 25.).

Zus. 1. Jedes Parallelogramm ist also auch einem Rechtecke gleich, das mit demselben gleiche Grundlinie und Höhe hat.

Zus. 2. Haben zwey Parallelogramme gleiche Höhen, aber ungleiche Grundlinien, so ist das, welches auf der grösseren Grundlinie steht, das grössere, weil alsdann ein Theil von diesem dem andern gleich ist.

Anmerkung. 2.

So oft in diesem Abschnitte Gleichheit zweyer Figuren ausgesagt wird, muß allemal der Beysatz: dem Flächeninhalte nach, hinzuge-dacht werden.

A n m e r k u n g 2.

Die beyden Attribute: gleiche Höhe haben, und zwischen einerley Parallelen seyn, sind völlig gleichbedeutend (§. 111.).

L e h r s a z. 75.

§. 176. Ein Parallelogramm ist doppelt so groß, als ein Dreyeck, das mit ihm auf gleicher (also auch auf einerley) Grundlinie und zwischen einerley Parallelen ist.

Hypoth.	Fig.	Satz.
1) Es ist $AB = EF$.	77.	Es ist $EF GH = 2$
2) Es ist $AF \parallel DG$.		$\triangle ABD$.

V o r b e r e i t u n g.

Durch den Punkt B ziehe der A D die B C parallel (§. 103).

B e w e i s.

1) ABCD ist ein Parallelogramm (p. hyp. et constr.) u. B D seine Diagonale; daher $\triangle ADB = \triangle BDC$ (§. 117.), also $\triangle ADB + \triangle BDC = 2 \triangle ADB$ (§. 28.).

2) Da nun (p. hyp.) $EF = AB$, und $AF \parallel DG$, so ist $EG = AC$ (§. 175.).

3) Da aber (p. dem. 1.) $A C = 2 \Delta A D B$, so ist auch $E G = 2 \Delta A B D$ (§. 25.)

Zus. 1. Ein Dreyeck ist also halb so groß, als ein Parallelogramm, das mit ihm auf einerley oder gleicher Grundlinie und zwischen einerley Parallelen ist (gleiche Höhe hat).

Zus. 2. Ein Dreyeck ist also auch halb so groß, als ein Rechteck, das mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat.

Zus. 3. Demnach sind alle Dreyecke von gleicher (also auch von einerley) Grundlinie und Höhe einander gleich. Denn sie sind (Zus. 1.) die Hälften von gleichen Parallelogrammen (§. 175.), und als solche einander gleich (§. 27.).

Zus. 4. Mehrere Dreyecke $A C B$, $B C D$, $D C E$ (Fig. 78.) von gleicher Höhe sind zusammen einem Dreyecke $A C E$ gleich, das eine eben so große Höhe hat, und dessen Grundlinie $A E$ den Grundlinien aller jener Dreyecke zusammen gleich ist.

Denn da von C nach $A E$ nur ein Loth möglich ist (§. 80. Z. 3.), so haben die Dreyecke $A C B$, $B C D$, $D C E$ einerley Höhe (§. 63.), und diese Höhe ist der Höhe von jedem der gegebenen Dreyecke $A C B$, $B C D$, $D C E$ gleich (p. hyp.). Wenn daher, $A B = A B$, $B D = B D$, $D E = D E$, so ist $\Delta A C B = \Delta A C B$, $\Delta B C D = \Delta B C D$

$$\triangle DCE = \triangle DCE \text{ (Zus. 3.)}, \text{ folglich } \triangle ACE = \triangle ACB + \triangle BCD + \triangle DCE \text{ (§. 28.)}.$$

Zus. 5. Demnach sind auch mehrere Parallelogramme BF, DG, DH von gleicher Höhe zusammen einem Parallelogramme AH gleich, das eine eben so große Höhe hat, und dessen Grundlinie AE den Grundlinien aller jener Parallelogramme zusammen gleich ist.

$$\begin{aligned} \text{Denn da } \triangle ACE &= \triangle ACB + \triangle BCD + \triangle DCE \text{ (Zus. 4.)}, \text{ so ist auch } 2 \triangle ACE \\ &= 2 \triangle ACB + 2 \triangle BCD + 2 \triangle DCE \\ \text{ (§. 26.)}. \text{ Es ist aber } 2 \triangle ACE &= AH, 2 \triangle ACB = BF, 2 \triangle BCD = DG, 2 \triangle DCE = DH \text{ (Lehrs. 75.)}; \\ \text{folglich } AH &= BF + DG + DH \text{ (§. 25.)}. \end{aligned}$$

Zus. 6. Wenn daher mehrere Dreyecke oder Parallelogramme einen Winkel nebst einer anliegenden Seite gleich haben, so sind sie zusammen einem Dreyecke oder Parallelogramme gleich, in welchem ein Winkel nebst einer anliegenden Seite eben so groß, und die zweyte anliegende Seite allen zweyten anliegenden Seiten in jenen zusammen gleich ist.

Denn jede zwey Dreyecke oder Parallelogramme von der angenommenen Beschaffenheit haben, wenn man die zweyten an den gleichen Winkeln anliegenden Seiten als die Grundlinien ansieht, gleiche Höhen (§. 79.), folglich hat

auch das eine Dreyeck oder Parallelogramm mit allen gegebenen gleiche Höhe, und ist mithin ihnen zusammen gleich (Zus. 5.).

Zus. 7. Ein Trapezion $A B D C$ (Fig. 79.) ist so groß, als ein Dreyeck von gleicher Höhe $C E$, dessen Grundlinie den beyden parallelen Seiten $A B$, $C D$ des Trapezions zusammen gleich ist. Denn, wenn man $B C$ zieht, so ist $A B D C = \triangle A B C + \triangle C D B$. In diesen Dreyecken aber ist, wenn man $A B$, $C D$ als Grundlinien ansieht, die Höhe $C E$ der $B F$ gleich (§. 110. Z. 1. und §. 111.); folglich ist das Trapezion $A B D C$ so groß, als ein Dreyeck von gleicher Höhe $C E$, dessen Grundlinie $= A B + C D$ ist (Zus. 4.).

Zus. 8. Gleiche Dreyecke auf einerley oder gleichen Grundlinien sind zwischen einerley Parallelen (haben gleiche Höhen).

Denn es sey in Fig. 80. a. $B F$ die gemeinschaftliche Grundlinie der Dreyecke $A B F$, $D B F$, in Fig. 80. b. aber $B C = F G$, und beyde in der Linie $B F$, die Spizen der gleichen Dreyecke aber in der Linie $A D$. Wäre nun nicht $A D \parallel B F$, so sey $A E \parallel B F$, alsdann ist, wenn man $E F$ zieht, in Fig. 80. a. $\triangle A B F = \triangle E B F$ (Zus. 3.) $= \triangle D B F$ (p. hyp.) in Fig. 80. b. aber $\triangle A B C = \triangle E F G$ (Zus. 3.) $= \triangle D F G$ (p. hyp.), beydes ge-

gen §. 24., welches unmöglich ist. Folglich muß $A D \nparallel B F$ seyn.

L e h r s a z 76.

§. 177. Jedes Parallelogramm wird von zwey Linien, die durch einen Punkt seiner Diagonale mit seinen Seiten parallel gehen, in vier Parallelogramme getheilt, von denen die beyden, durch welche die Diagonale nicht geht, einander gleich sind.

Hypoth.

Fig.

Satz.

1) $A B C D$ ist ein Parallelogramm, und $A C$ seine Diagonale.

81.

Es ist $BE = ED$.

2) Es ist $F G \nparallel A B$
 $\nparallel C D$.

3) Es ist $H I \nparallel A D$
 $\nparallel B C$.

B e w e i s.

Da $\triangle A B C = \triangle A D C$, $\triangle A E H = \triangle A E F$, und $\triangle C E G = \triangle C E I$ (§. 117.), so ist $\triangle A B C - (\triangle A E H + \triangle C E G) = \triangle A D C - (\triangle A E F + \triangle C E I)$ (§. 28. 29.), d. i. $BE = ED$.

Lehrsatz 77.

§. 178. In den rechtwinkligen Drey-ecken ist das Quadrat der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite (Hypotenuse) den Quadraten der beyden ihn einschließenden Seiten (Katheten) gleich.

Hypoth.

Fig.

Satz.

A B C ist ein rechtwin- 32. Es ist $\overline{BC}^q = \overline{AB}^q$
keliges Dreyeck, und $+ \overline{AC}^q$.
 $B A C = R.$

Vorbereitung.

1) Auf den Seiten B C, A E, A C beschreibe deren Quadrate B E, B G, C H (§. 125. Z.).

2) Durch A ziehe der B D die A L parallel (§. 103).

3) Ziehe die Verbindungslinien A D, C F, A E, B K.

Beweis.

1) Da (p. hyp.) $B A C = R.$ und (p. constr.) $B A G = R$, so ist $B A C + B A G = 2 R$, folglich liegen A C und A G in einer geraden Linie (§. 76.).

2) Eben so ist erweislich, daß A H und A B in einer geraden Linie liegen.

3) Da nun (p. constr.) $D B C = R$, und $A B F = R$, so ist $D B C = A B F$; folglich auch

$$\left. \begin{array}{l} D B C + A B C \\ A B D \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} A B F + A B C \\ C B F \end{array} \right) (\S. 28.).$$

Ferner ist (p. def.) $B D = B C$, und $A B = B F$, folglich $\triangle B A D = \triangle B C F$ (§. 66.).

4) Nun ist $B L = 2 \triangle B A D$
und $B G = 2 \triangle B C F$ (§. 176.);

folglich ist auch $B L = B G$ (§. 25.).

5) Eben so ist erweislich, daß $C L = C H$ sey; folglich ist $B L + C L = B G + C H$
 $B E$ (§. 28.).

6) Es ist aber $B E = \overline{B C}^q$, $B G = \overline{A B}^q$,
 $C H = \overline{A C}^q$; folglich ist $\overline{B C}^q = \overline{A B}^q + \overline{A C}^q$ (§. 25.).

Anderer Beweis.

1) Auf der Seite A C des bey A rechtwinkligen Dreyecks A B C (Fig. 83.) beschreibe ihr Quadrat A K (§. 125. Z.).

2) Mache die beyden E K, F H der A B gleich (§. 65.).

3) Auf der Seite F H beschreibe ihr Quadrat F G (§. 125. Z.).

4) Ziehe C E, E D, D B.

5) Nun sind die Dreyecke A B C, C E K, D E G, B D F congruent (§. 66.), folglich das Viereck B C E D gleichseitig, auch $A C B = E C K$, folglich

$$\left. \begin{array}{l} A C B + A C E \\ B C E \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} A C E + E C K \\ A C K \end{array} \right. \quad (\S. 28.)$$

$= R$ (p. constr.), und mithin $B C E D = \overline{B C}^q$ (§. 118. §. 123. Z. 1. und §. 124.).

6) Nun ist $B C E D = \triangle A B C + \triangle B D F + C A F D E$, und $A K + F G = \triangle C E K + \triangle D G E + C A F D E$.

7) Da aber (p. dem. 5.) $\triangle A B C + \triangle B D F = \triangle C E K + \triangle D E G$, so ist $B C E D = A K + F G$ (§. 25.) d. i. $\overline{B C}^q = \overline{A C}^q + \overline{A B}^q$.

Zus. 1. In den rechtwinkligen Dreyecken ist das Quadrat einer jeden Kathete dem Unterschiede der Quadrate der beyden andern Seiten gleich. Denn wenn $\overline{B C}^q = \overline{A C}^q + \overline{A B}^q$ so ist auch $\overline{B C}^q - \overline{A C}^q = \overline{A B}^q$ u. $\overline{B C}^q - \overline{A B}^q = \overline{A C}^q$ (§. 29.),

Zus. 2. Eine Linie, deren Quadrat dem Aggregate zweyer gegebenen Quadrate gleich ist, wird gefunden, wenn man die Seiten der letzteren AC , AD (Fig. 84.) unter einem rechten Winkel DAC an einander setzt, und deren Endpunkte D , C durch die Linie DC verbindet; da dann $DC^2 = AC^2 + AD^2$ (Lehrs. 77.).

Zus. 3. Eine Linie deren Quadrat dem Unterschiede zweyer gegebenen Quadrate gleich ist, wird gefunden, wenn man mit AB , (Fig. 85.) der Seite des grösseren, den Halbkreis BED beschreibt, alsdann AC der Seite des kleineren gleich macht, auf dieser in C das Loth CE aufrichtet und die Verbindungslinie AE zieht, da dann $AE = AB$ (p. def.), folglich $CE^2 = AB^2 - AC^2$ (Zus. 1.).

Zus. 4. Von jedem Quadrate ist das Quadrat seiner Diagonale das Doppelte.

Zus. 5. Wenn von einer Ecke A (Fig. 86.) eines Dreyecks ABC ein Loth AD auf die (nöthigenfalls verlängerte) Grundlinie BC gefällt wird, so ist der Unterschied der Quadrate der einen Seite AB und des anliegenden Abschnitts BD dem Unterschiede der Quadrate der andern Seite AC und des anliegenden Abschnitts CD gleich (Zus. 1. und §. 25).

Zus. 6. Wenn von einer Ecke A (F. 86.) eines Dreyecks A B C ein Loth A D auf die Grundlinie B C gefällt wird, so ist von den dadurch entstehenden Abschnitten C D, B D der Grundlinie derjenige der gröfsere, welcher an der gröfseren, und derjenige der kleinere, welcher an der kleineren Seite liegt. Denn da $AC > AB$, so ist auch $\overline{AC^q} > \overline{AB^q}$ (§. 127.). Nun ist aber $\overline{AC^q} = \overline{AD^q} + \overline{DC^q}$, und $\overline{AB^q} = \overline{AD^q}$ und mithin $\overline{DC^q} > \overline{BD^q}$ (§. 32.), also auch $DC > BD$ (§. 127. Z. 3.).

A n m e r k u n g.

Drey und zwanzig verschiedene Beweise dieses Lehrsazes, der nach seinem angeblichen Erfinder, Pythagoras, der Pythagorische genannt wird, hat der vormalige Profesor Lange zu Halle in einer 1752. herausgegebenen Dissertation gesammelt, und den vier und zwanzigsten hat der vormalige Profesor Kies in Tübingen mit Hülfe der Infinitesimalrechnung hinzugesetzt.

L e h r s a z 78.

§. 179. Wenn das Quadrat einer von den Seiten eines Dreyecks den Quadraten der beyden übrigen Seiten desselben gleich

ist, so ist der von den zwey übrigen Seiten des Dreyecks eingeschlossene Winkel ein rechter.

Hypoth.	Fig.	Saz.
Es ist $\overline{B C}^q = \overline{A B}^q$	84.	Es ist $B A C = R.$
$+ \overline{A C}^q$		

V o r b e r e i t u n g.

1) Errichte in dem Punkte A auf der A C das Loth A D (§. 72.).

2) Mache $A D = A B$ (§. 65.).

3) Ziehe die Verbindungslinie D C.

B e w e i s.

1) Da (p. constr.) $A D = A B$, so ist auch $\overline{A D}^q = \overline{A B}^q$ (§. 124. Z. 5.), also auch $\overline{A D}^q + \overline{A C}^q = \overline{A B}^q + \overline{A C}^q$ (§. 28.).

2) Es ist aber $\overline{A D}^q + \overline{A C}^q = \overline{C D}^q$, und $\overline{A B}^q + \overline{A C}^q = \overline{B C}^q$ (§. 178.); folglich auch $\overline{C D}^q = \overline{B C}^q$ (§. 25.), und mithin $C D = B C$ (§. 127. Z. 1.).

3) Da nun (p. constr.) $A D = A B$, auch $A C = A C$, so ist $\triangle A D C \stackrel{\circ}{=} \triangle$

$A B C$ (§. 69.), und mithin $D A C \equiv B A C \equiv R$ (p. constr.).

A u f g a b e 26.

§. 180. Ein Dreyeck in ein Parallelogramm zu verwandeln, zu welchem ein Winkel gegeben ist.

Gegeben.

Fig.

Gesucht.

1) Ein Dreyeck

87.

Ein Parallelogramm,

$A B C$.

das dem $\triangle A B C$

2) Ein Winkel N .

gleich ist, und ei-

nen Winkel $\equiv N$

enthält.

Auflösung und Beweis.

1) Halbire die $A B$ in D (§. 71.).

2) Mache $B D E \equiv N$ (§. 85.).

3) Ziehe $C F \parallel A B$, und $B F \parallel D E$ (§. 103.).

4) Nun ist $D F \equiv 2 \triangle B C D$ (§. 176.)
 $\equiv \triangle A C D + \triangle B C D$ (§. 176. Z. 3.) $\equiv$
 $\triangle A C B$ (§. 23.), folglich ist $D F$ das ver-
 langte Parallelogramm.

A u f g a b e 27.

§. 181. Ein Parallelogramm in ein Dreyeck zu verwandeln, zu welchem ein Win-

kel gegeben, und in welchem die anliegende Seite doppelt so groß ist, als des Parallelogramms Grundlinie.

Gegeben.	Fig.	Gesucht.
1) Ein Parallelogramm D F	87.	Ein Dreyeck. $\equiv$ D F, das eine Seite
2) Ein Winkel O.		$\equiv 2$ B D und einen Winkel $\equiv$ O hat.

Auflösung und Beweis.

- 1) Verlängere F E und B D.
- 2) Mache $DA \equiv BD$ (§. 65.)
- 3) Mache $ABC \equiv O$ (§. 85.); so schneidet B C die verlängerte F E in C. (§. 110. Z. 3.).
- 4) Ziehe A C, so ist $\triangle ACD \equiv \triangle BCD$ (§. 176. Z. 3.).
- 5) Nun ist $DF \equiv 2 \triangle BCD$ (§. 176.), also auch $DF \equiv \triangle ACD + \triangle BCD$ (p. dem. 4.) $\equiv \triangle ACB$ (§. 23.), und mithin $\triangle ACB$ das verlangte Dreyeck.

A u f g a b e 28.

§. 182. Ein Parallelogramm in ein anderes zu verwandeln, zu welchem ein Winkel und eine Seite gegeben ist.

Gegeben.	Fig.	Gesucht.
1) Ein Parallelo- gramm DF	87.	Ein Parallelogramm. $\equiv DF$, das einen
2) Eine Seite L .		Winkel $\equiv EDB$, und eine Seite $\equiv L$ hat.

A u f l ö s u n g u n d B e w e i s.

- 1) Verlängere EF .
- 2) Mache $FG \equiv L$ (§. 65.).
- 3) Ziehe GB und verlängere sie, bis sie die verlängerte ED in I schneidet (§. 110. Z. 3.).
- 4) Ziehe $IM \parallel EG$, und $GM \parallel EI$ (§. 103.).
- 5) Verlängere DB bis H ; und FB bis K .
- 6) Nun ist $HK \equiv DF$ (§. 177.), $BKM \equiv FBH \equiv EDB$ (§. 110.), und $KM \equiv FG$ (§. 117.) $\equiv L$ (p. constr.); also HK das verlangte Parallelogramm.

A u f g a b e 29.

§. 183. Ein Parallelogramm in ein Dreyeck zu verwandeln, zu welchem ein Winkel und eine anliegende Seite gegeben ist.

Gegeben.	Fig.	Gesucht.
1) Ein Parallelogramm.	87.	Ein Dreyeck $\triangle D F$, das einen Winkel $\angle O$, und eine Seite $\triangle P$ hat.
2) Ein Winkel $\angle O$.		
3) Eine Seite P .		

A u f l ö s u n g u n d B e w e i s.

1) Verwandle $D F$ in ein Parallelogramm $H K$, in welchem $B K M \triangleq E D B$ und $K M \triangleq \frac{1}{2} P$ ist (§. 182.).

2) Verwandle $H K$ in ein Dreyeck, in welchem ein Winkel $\angle O$, und eine anliegende Seite $\triangle K M \triangleq P$ ist (§. 181.), so ist dieses Dreyeck das verlangte.

A u f g a b e 30.

§. 184. Eine jede geradlinige Figur in ein Parallelogramm zu verwandeln, zu welchem ein Winkel N und eine Seite L gegeben ist.

Auflösung und Beweis.

1) Ziehe aus einer Ecke der Figur alle Diagonalen, so wird dadurch das n Eck in $n - 2$ Dreyecke getheilt (§. 128. a. Z. 3.).

2) Verwandle jedes Dreyeck in ein Parallelogramm, in welchem ein Winkel $= N$ ist (§. 180.), und jedes von diesen Parallelogrammen in ein anderes, in welchem auch ein Winkel $= N$ und eine Seite $= L$ ist (§. 182.).

3) Auf L beschreibe mit dem Winkel N und einer zweyten Seite, die so groß ist, als alle zweyten Seiten in den gefundenen Parallelogrammen zusammen, ein Parallelogramm (§. 125. 126.); so ist dieses so groß, als alle jene zusammen (§. 176. Z. 6.), also der gegebenen Figur gleich.

Zus. 1. Also kann man jede geradlinige Figur in ein Rechteck, zu welchem eine Seite gegeben ist, verwandeln, wenn man den Winkel $N = R$ nimmt.

Zus. 2. Eben so kann man auch mehrere geradlinige Figuren in ein Parallelogramm, zu welchem eine Seite und ein Winkel gegeben ist, verwandeln. Denn man darf nur jede von

ihnen in ein Parallelogramm, das die gegebene Seite und den gegebenen Winkel hat, oder in ein Rechteck, das die gegebene Seite hat, verwandeln, und dann auf dieser Seite unter dem gegebenen Winkel ein Parallelogramm beschreiben, in welchem die zweyte Seite so groß ist, als alle zweyten Seiten in den gefundenen Parallelogrammen zusammen.

A u f g a b e 31.

§. 185. Eine jede geradlinige Figur in ein Dreyeck zu verwandeln, zu welchem ein Winkel N und eine anliegende Seite L gegeben ist.

A u f l ö s u n g u n d B e w e i s.

1) Verwandle die Figur in ein Parallelogramm, in welchem ein Winkel $= N$ und eine Seite $= \frac{1}{2} L$ ist (§. 184.).

2) Dieses verwandle in ein Dreyeck, in welchem ein Winkel $= N$ und eine Seite $= L$ ist (§. 183.), so ist das Verlangte geschehen.

Z u s. Demnach kann man jede geradlinige Figur in ein rechtwinkeliges Dreyeck, zu welchem eine Kathete gegeben ist, verwandeln, wenn man den Winkel $N = R$ nimmt.

Verbesserungen.

Bey §. 55. muß in Zusaz 3. das Wort: *geraden* zwischen den Worten: *einer und Linie* durchgestrichen, und bloß gelesen werden: „auf entgegengesetzten Seiten einer Linie liegen.“

Bey §. 60. muß in Zus. 5. am Ende statt der Worte: „mit der andern einen Punkt gemein hat“ gelesen werden:

„durch einen Punkt der andern gehen muß.“

Nach §. 62. Zus. 2. ist hinzuzusezen:

Zus. 3. Wenn in zwey Kreislinien der Abstand der Mittelpunkte dem Halbmesser beyder gleich ist, so muß jede durch den Mittelpunkt der andern gehen.

In §. 63. am Ende ist der Punkt nach dem Worte: *apex* in ein Komma zu verwandeln, und alsdann hinzuzusezen: „und ein Loth von der Spitze nach der Grundlinie, seine Höhe.“

Nach §. 88. Zus. ist einzuschalten;

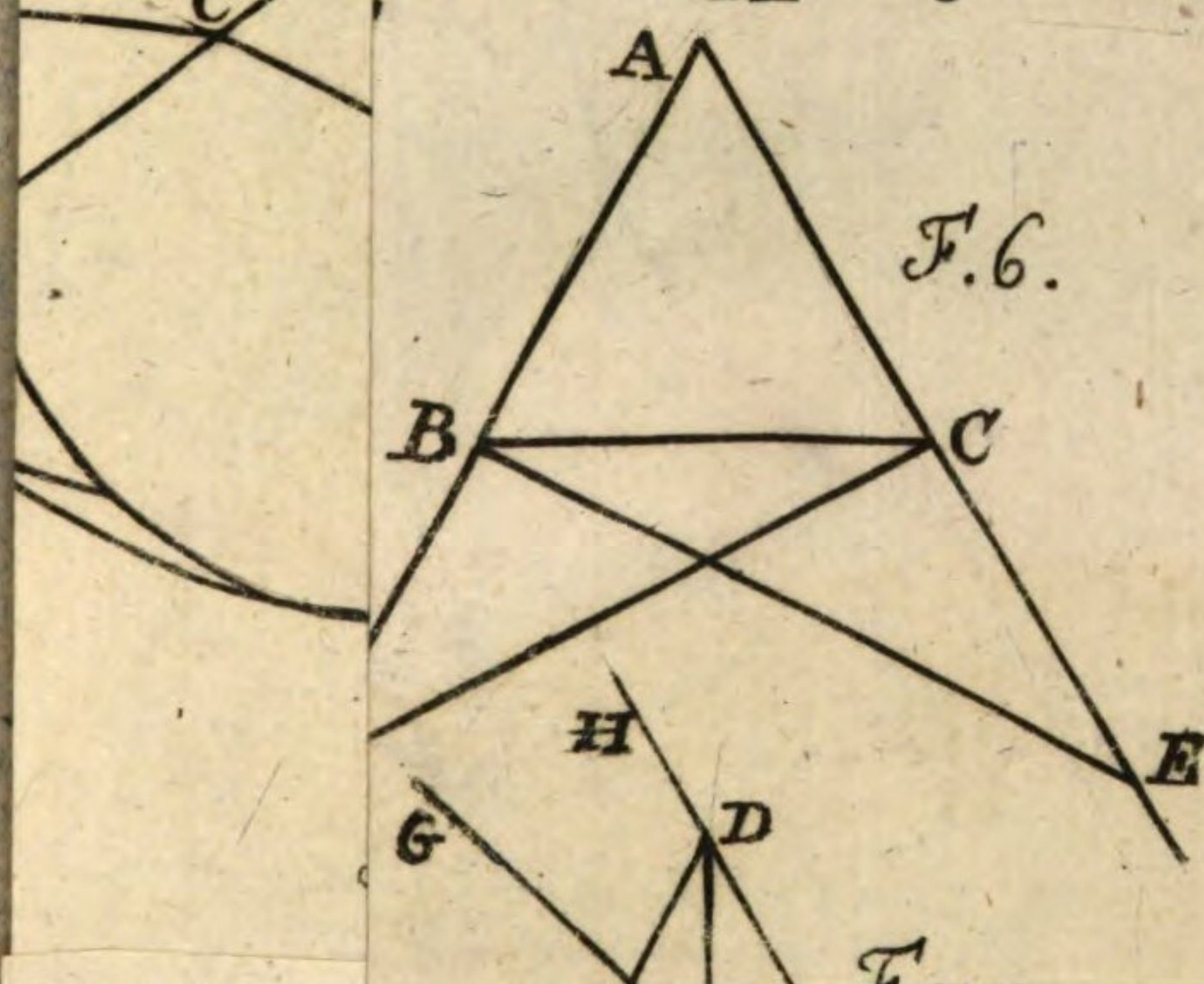
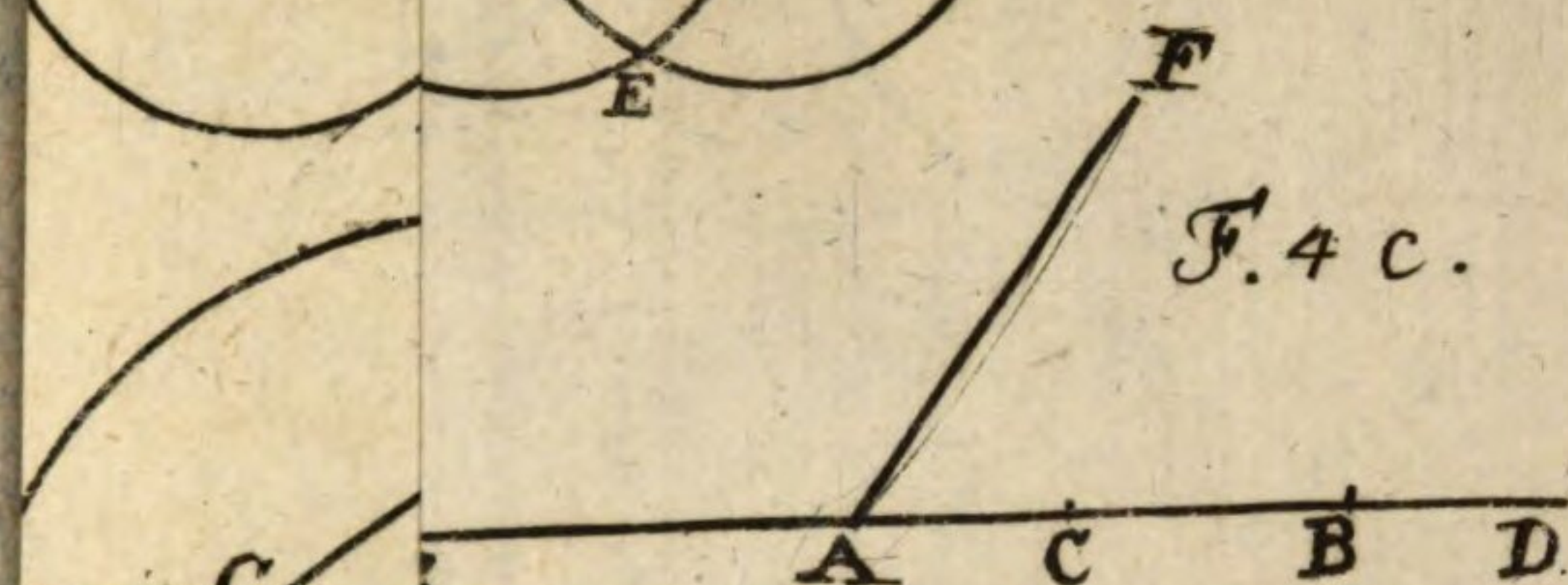
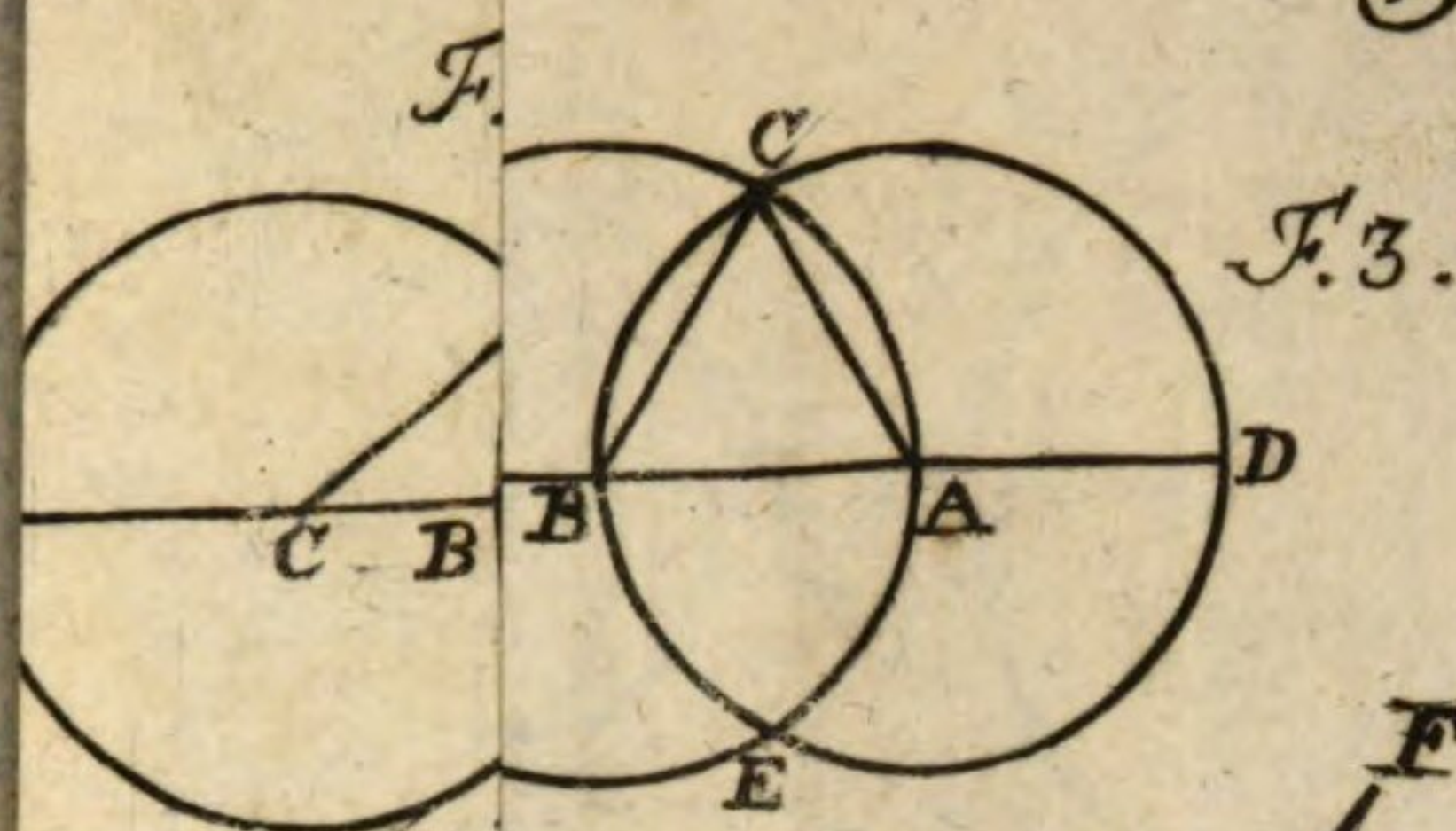
Zus. 2. Unter mehreren Linien zwischen den nämlichen Endpunkten ist immer die der *geraden* nähere kleiner, als die entferntere (n. d. II. Th. d. Bew.).

Nach §. 148. Zus. 2. ist einzuschalten:

Zus. 3. Zwey zusammenlaufende Tangenten der Kreislinie sind größer, als der Kreisbogen zwischen den Berührungspunkten.

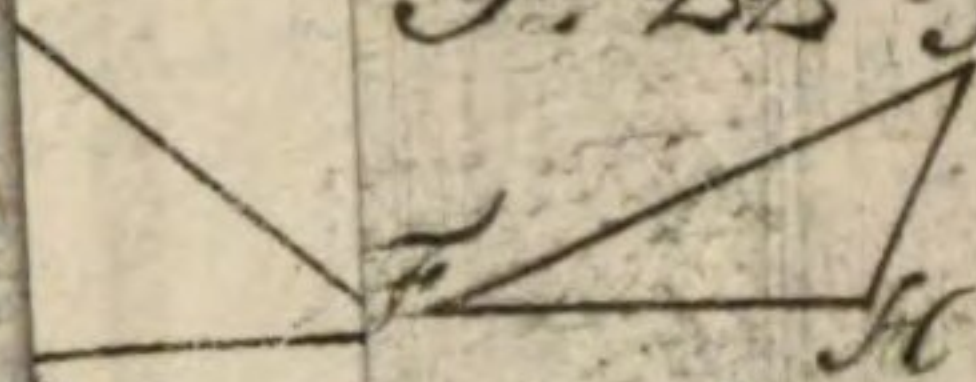
Denn, da die beyden Tangenten ganz jenseits des Kreishogens liegen (§. 145.), so ist, wenn man die Sehne zwischen den Berührungspunkten zieht, der Kreishogen dieser näher, als die gebrochene Linie, welche die Tangenten bilden, folglich diese grösser, als jener (§. 88. Z. 2.).

Tafel I.

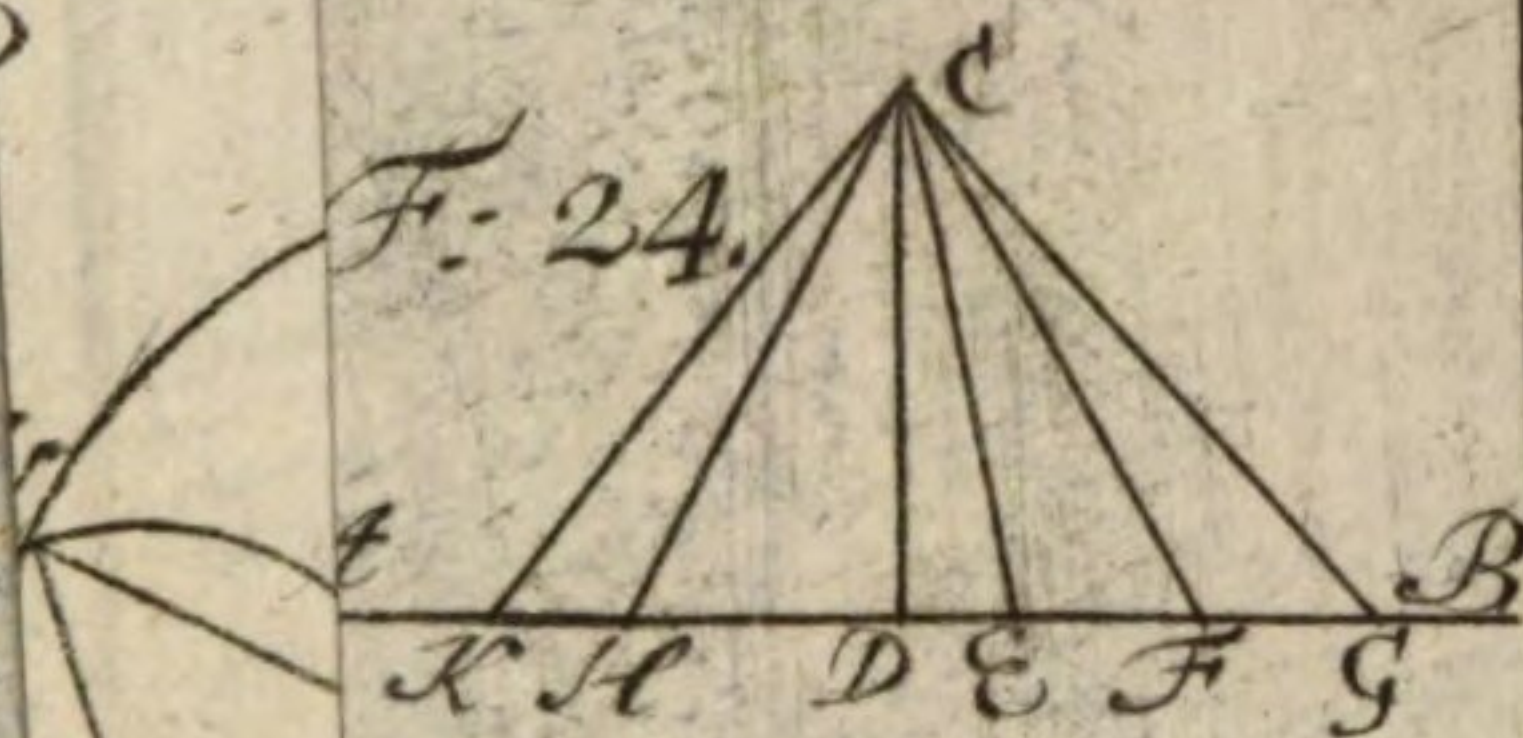


Tafel. II.

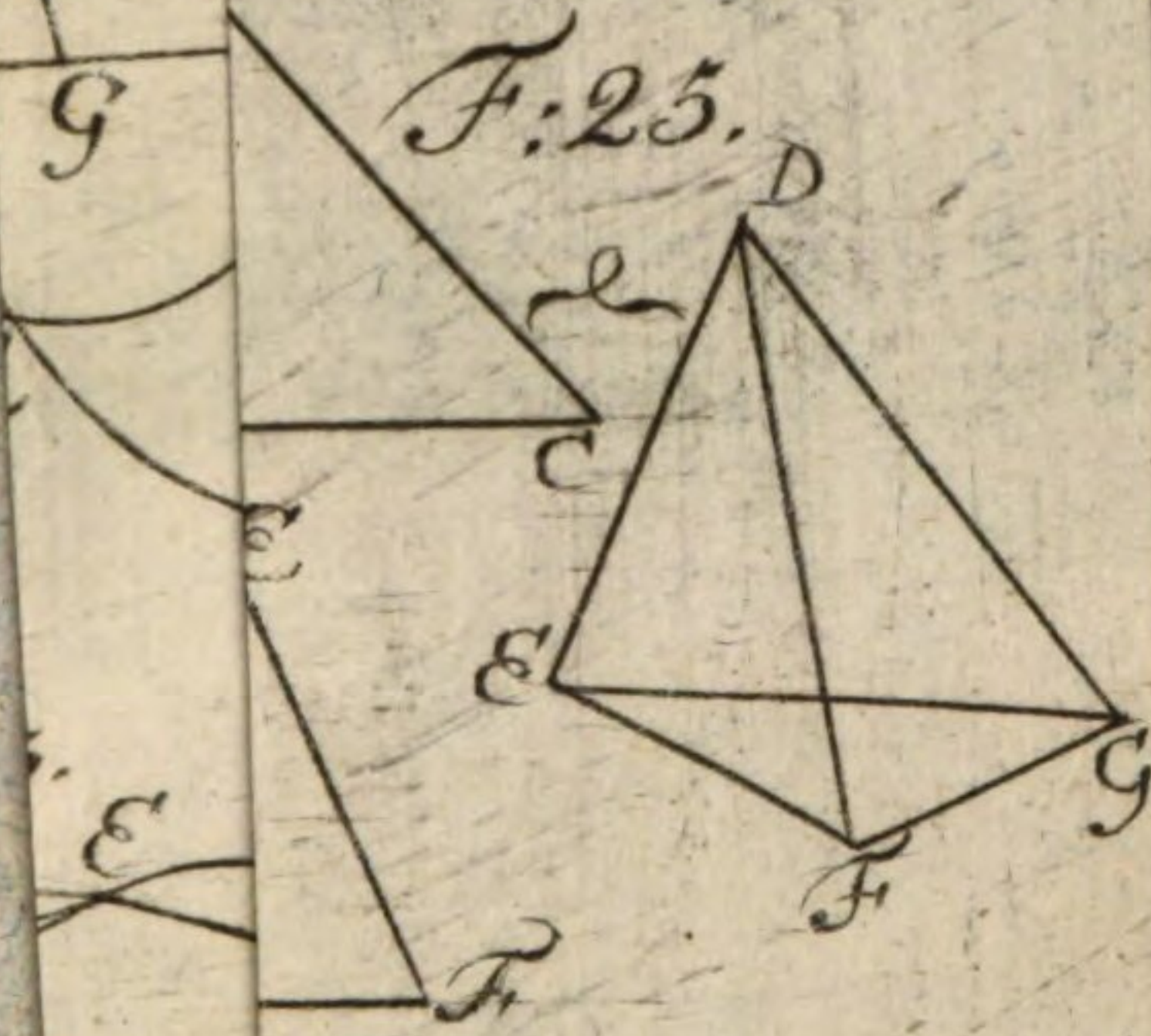
F: 22. K



F: 24.



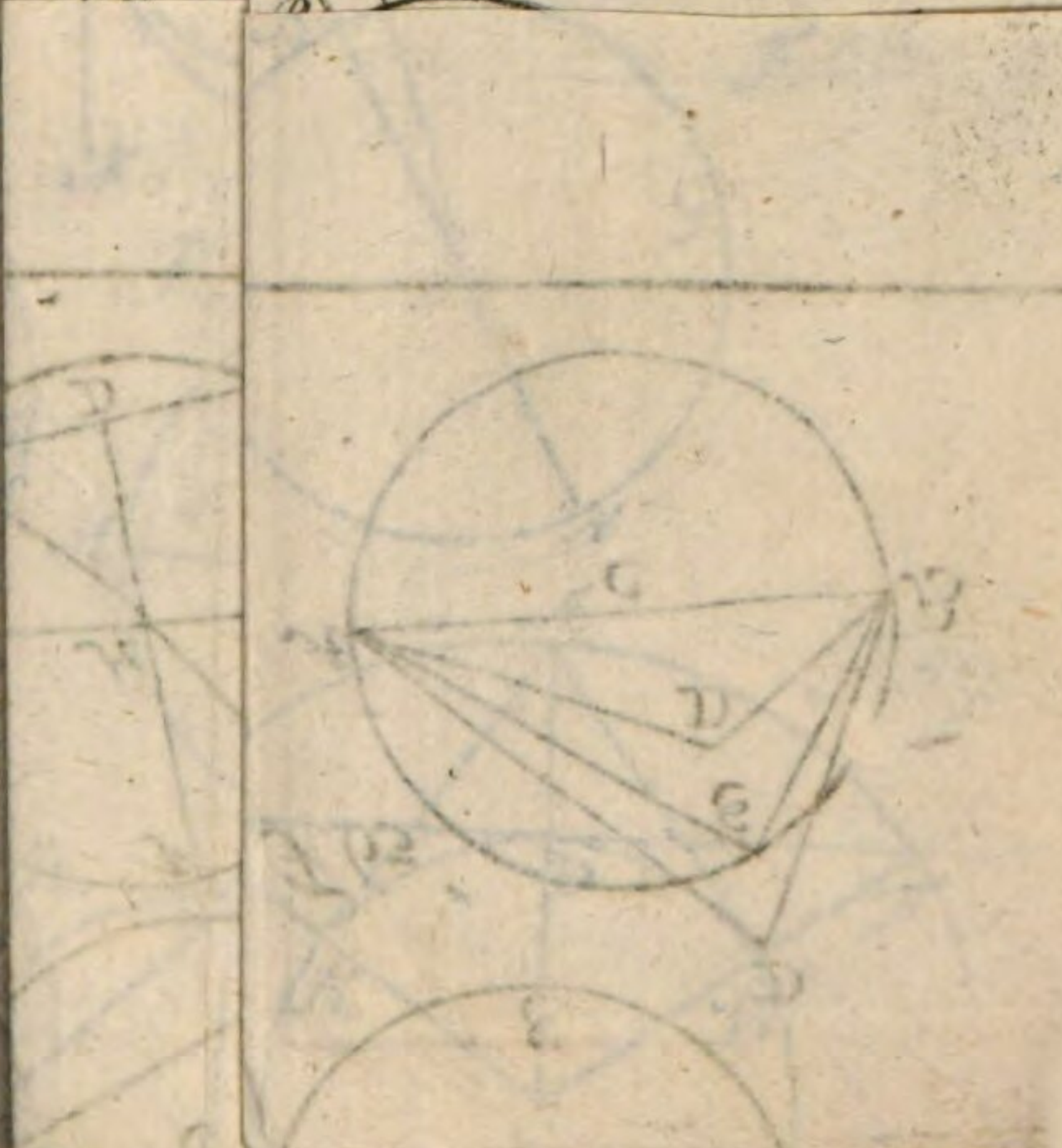
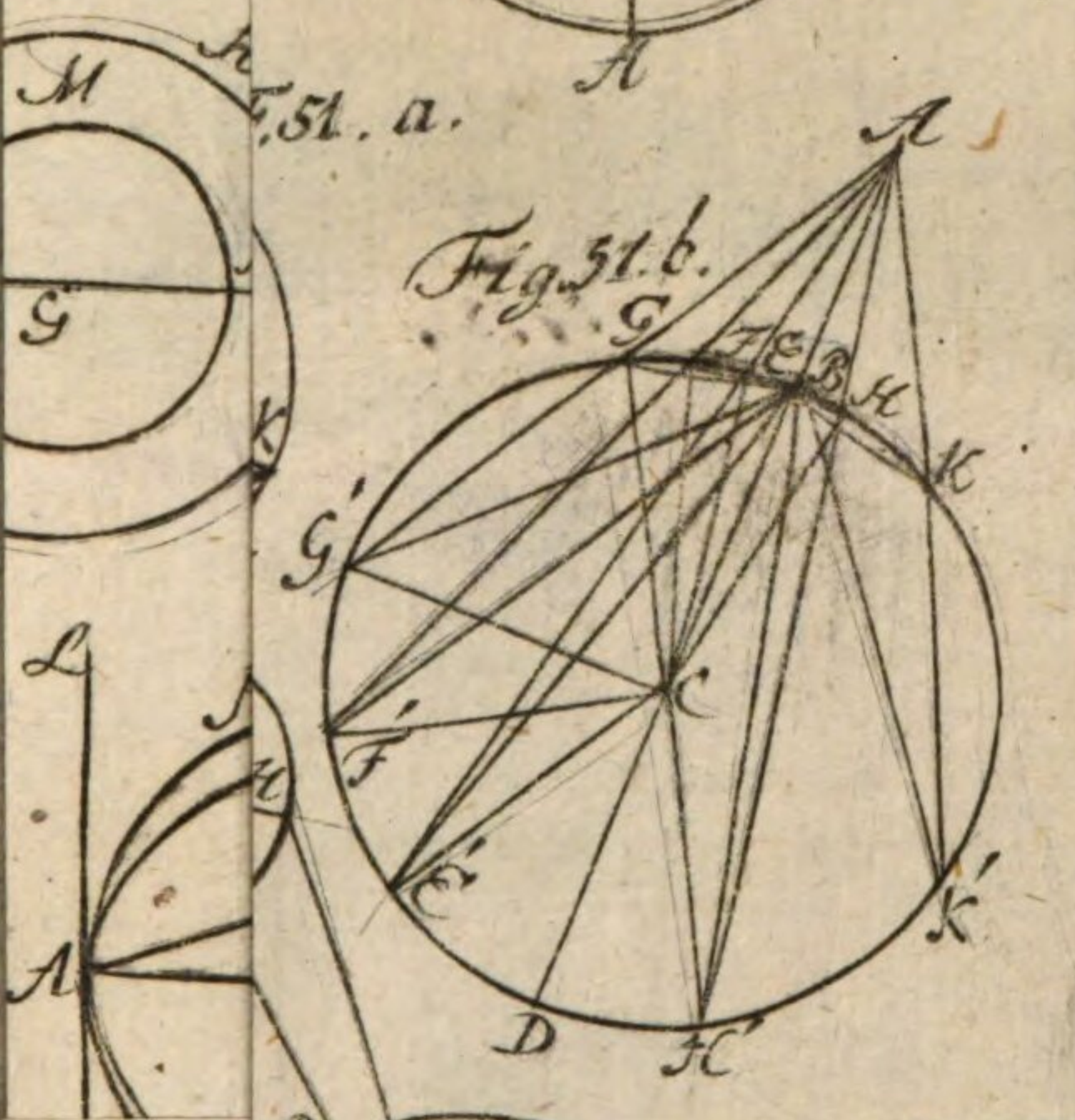
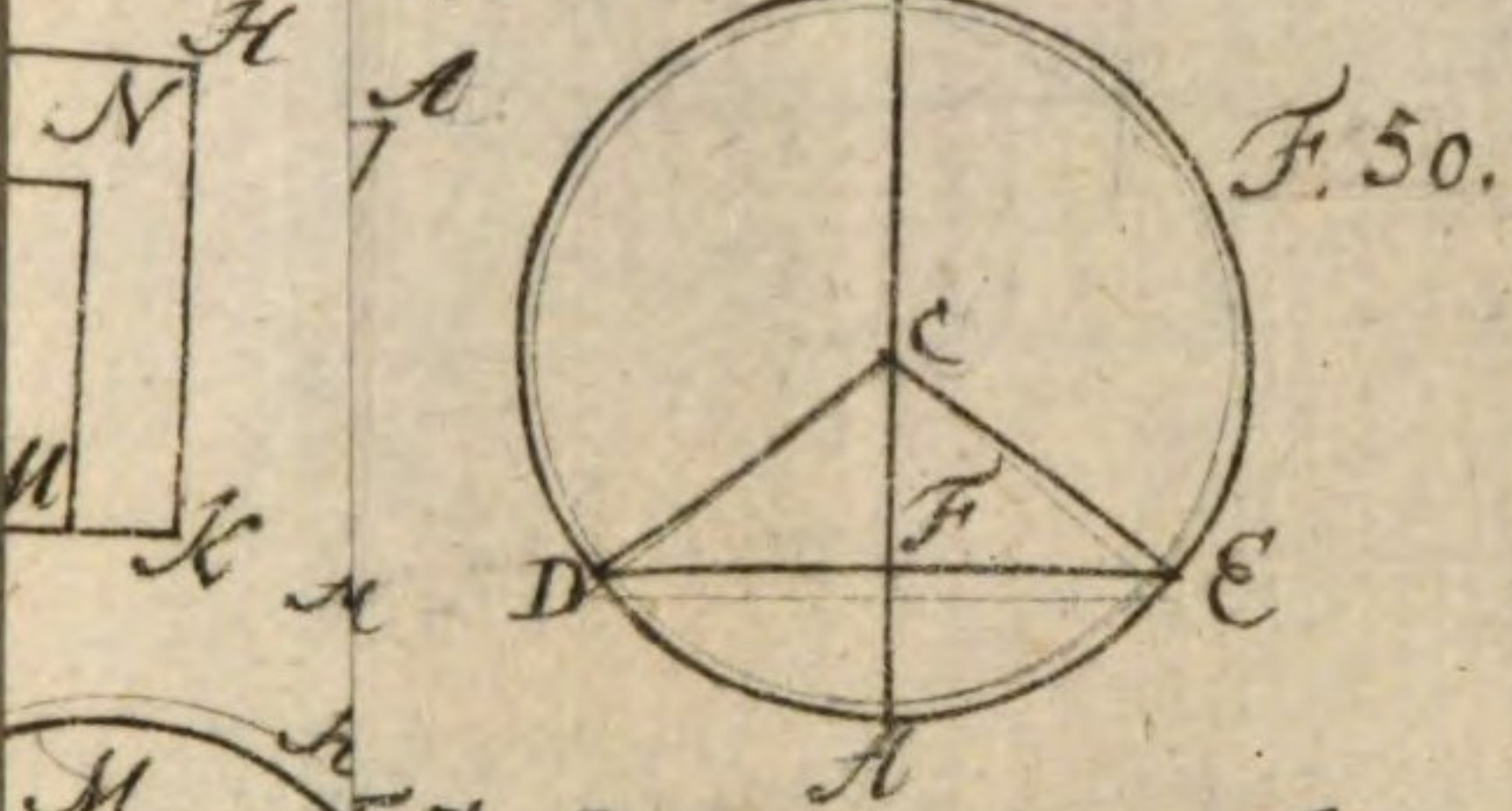
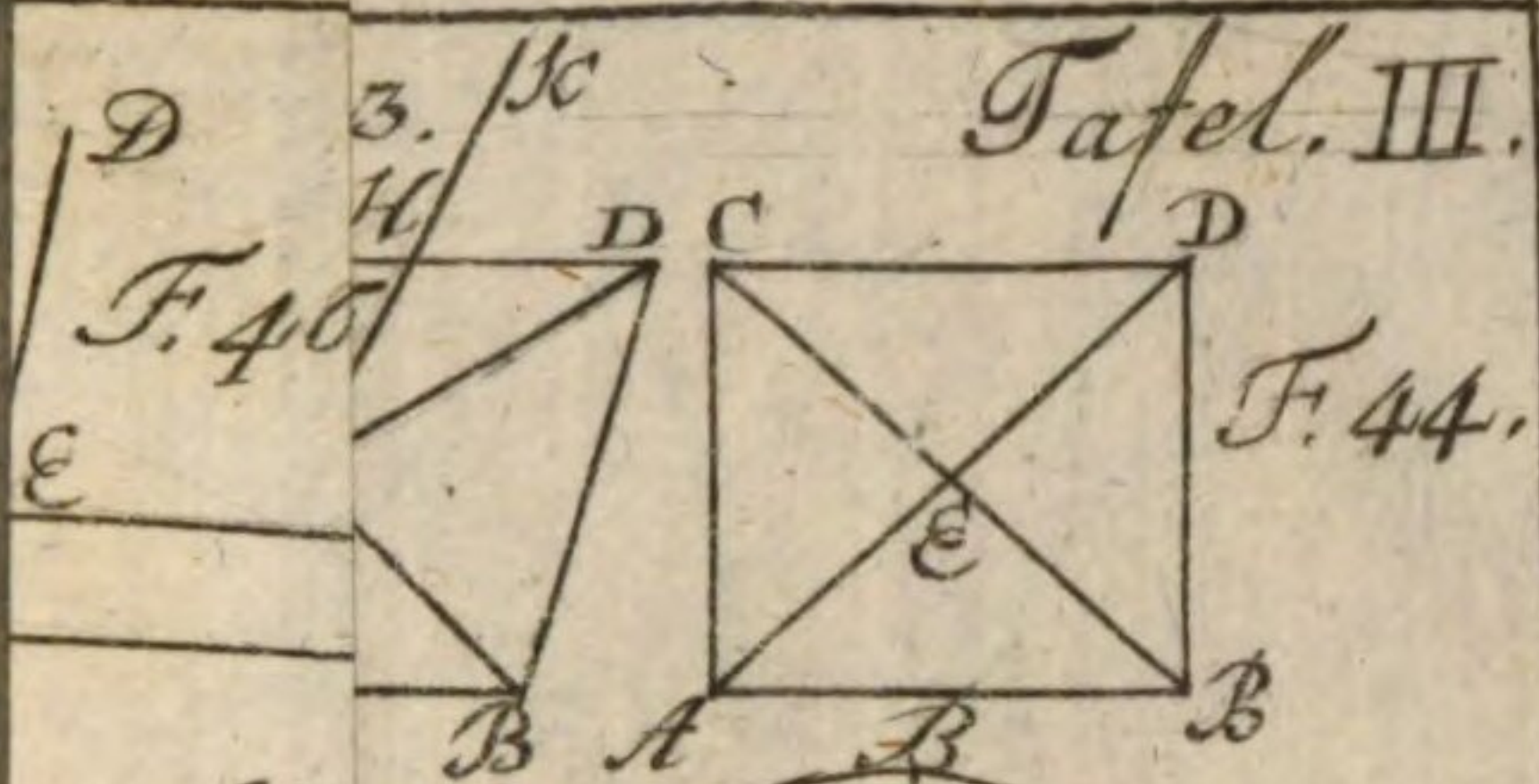
F: 25.



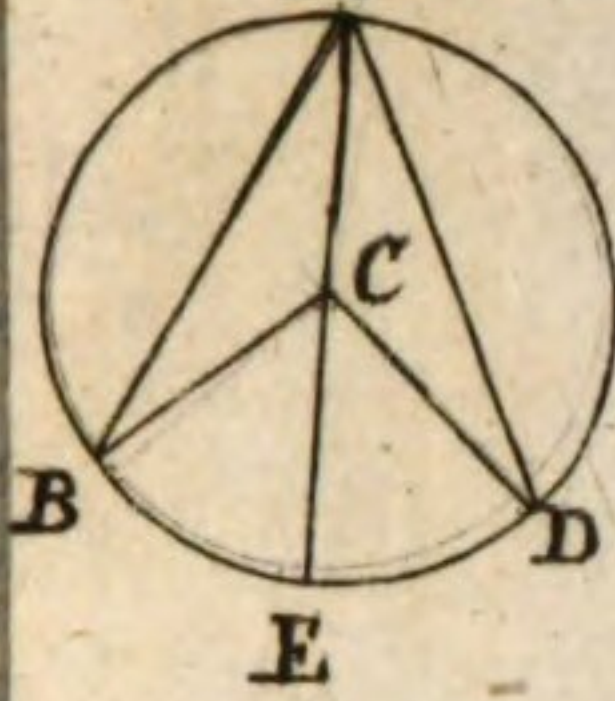
F: 20



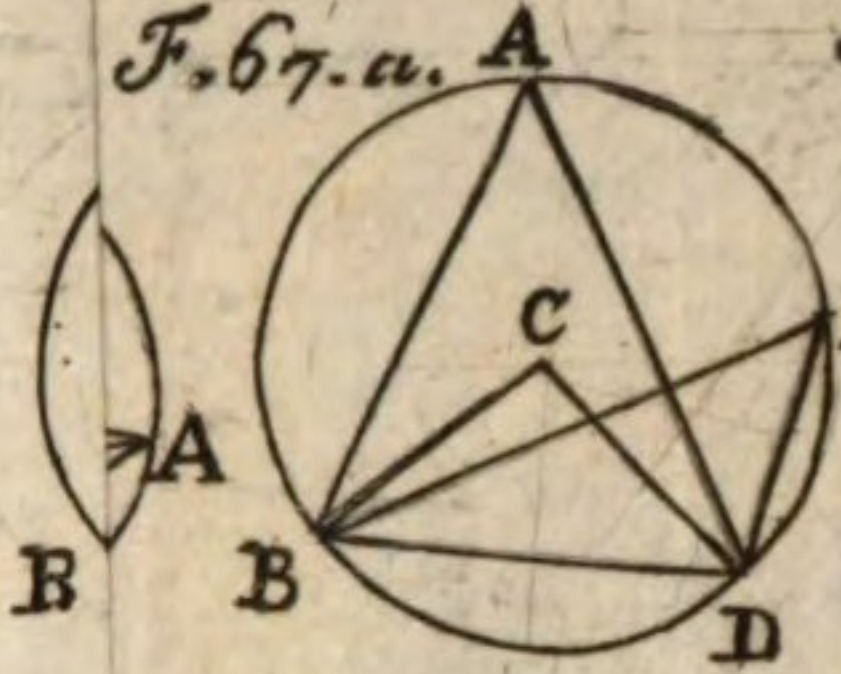
Tafel. III.



F. 66. a.



F. 67. a.

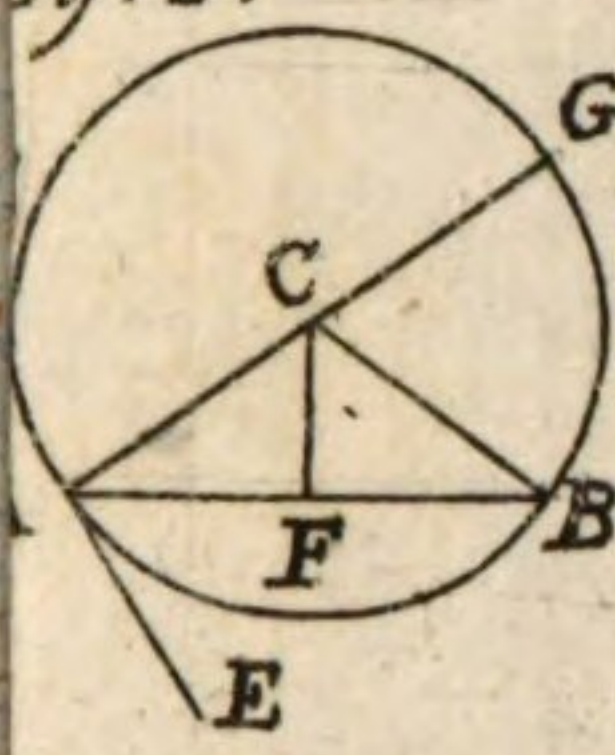


F. 67. b.

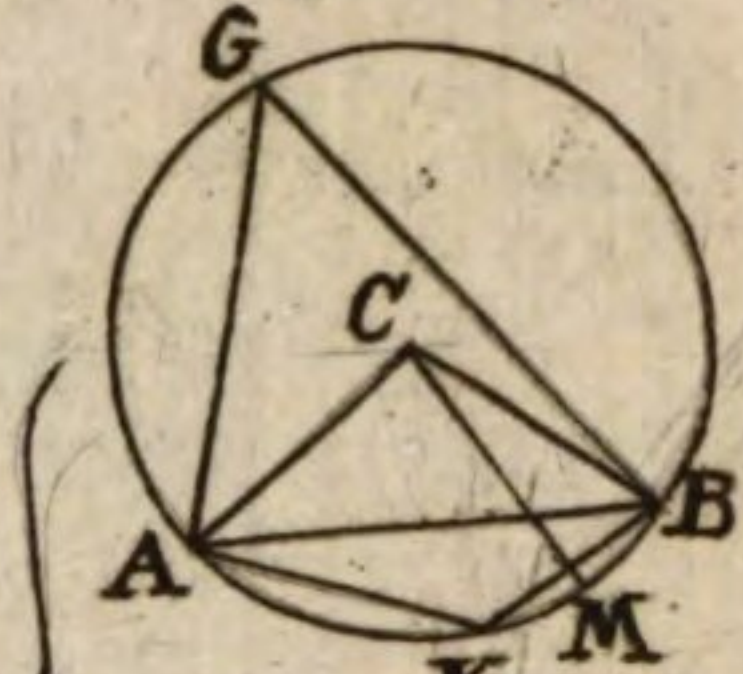
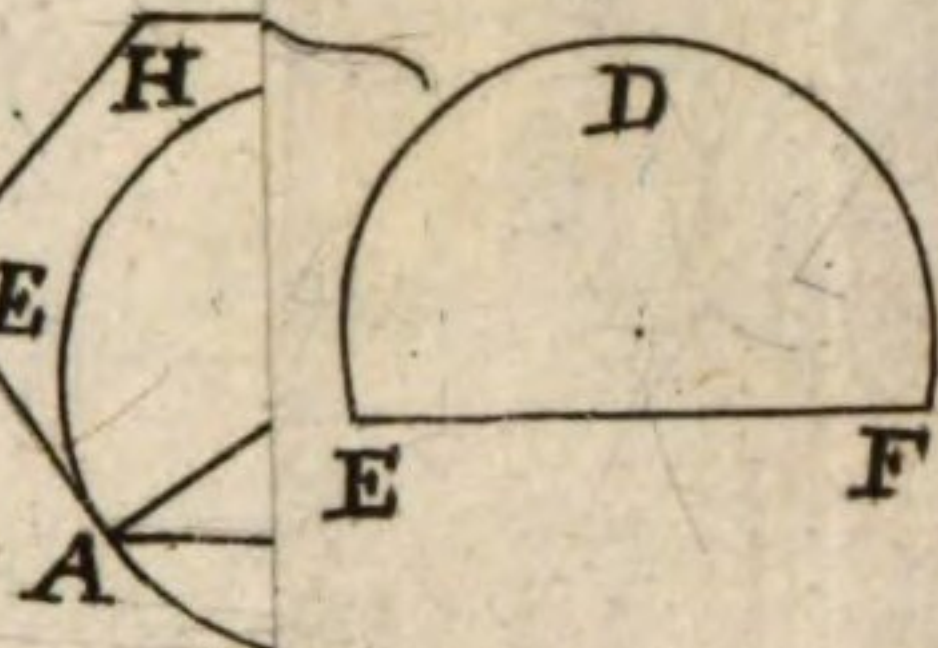


Tafel IV.

Fig. 6.



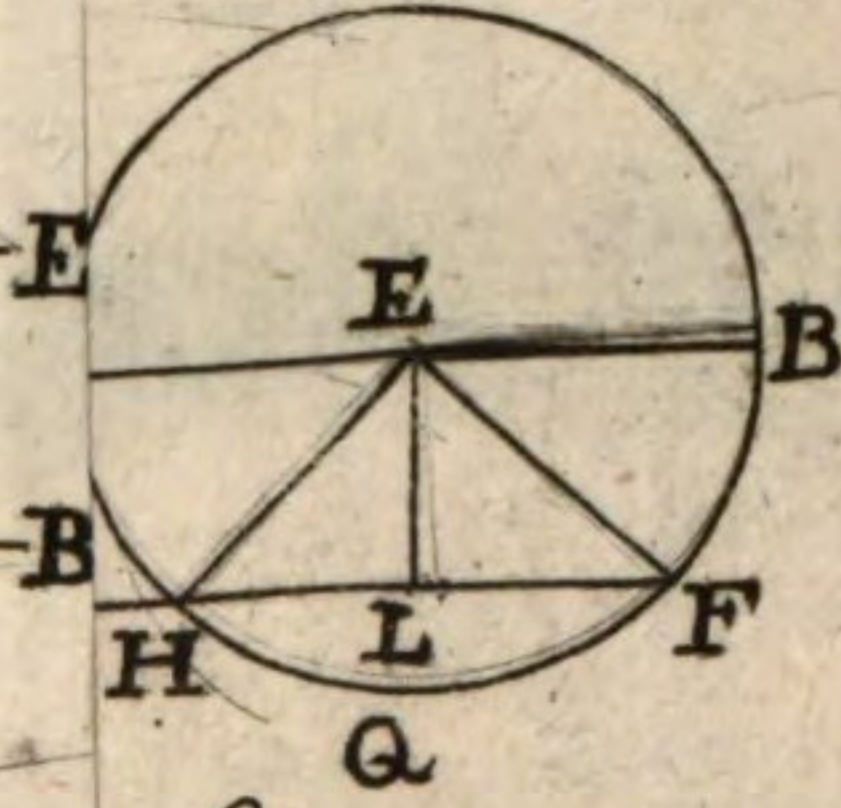
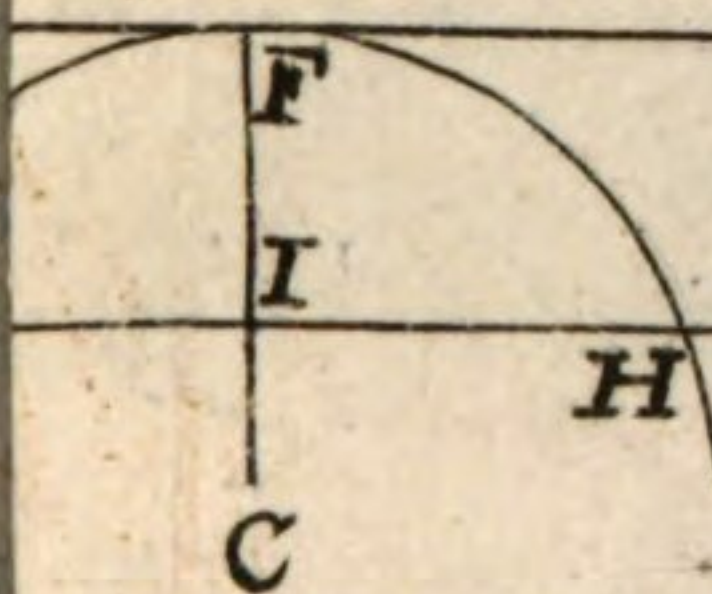
F. 70.



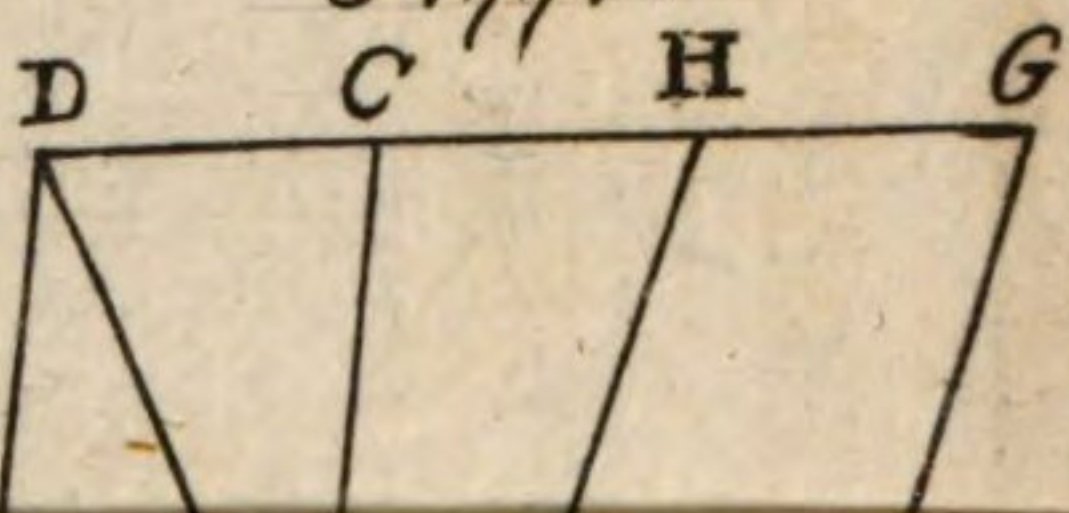
F. 71.



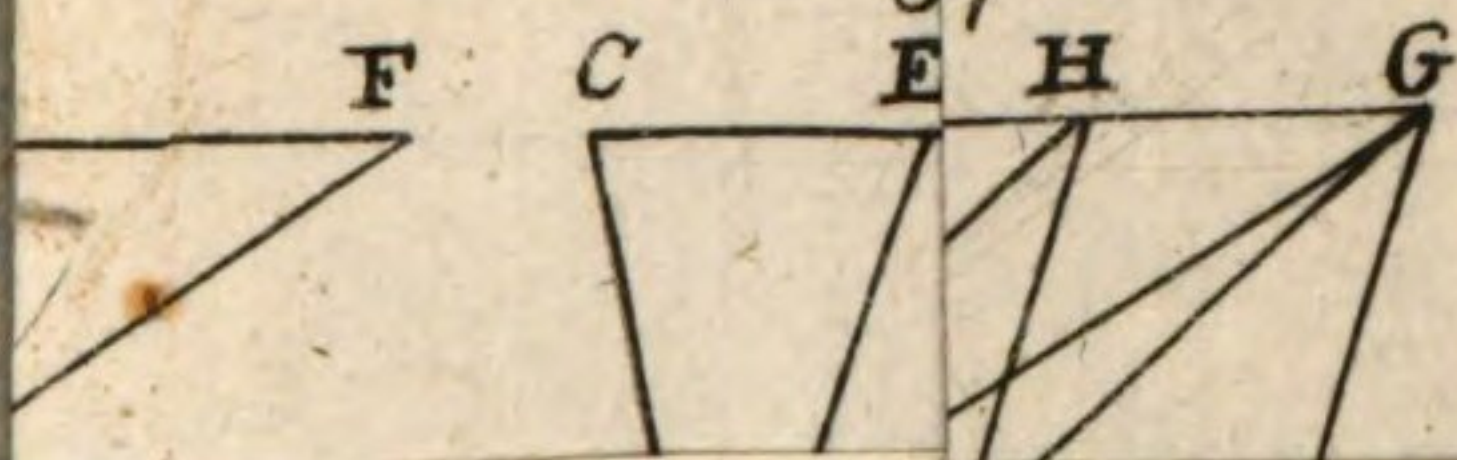
F. 73.



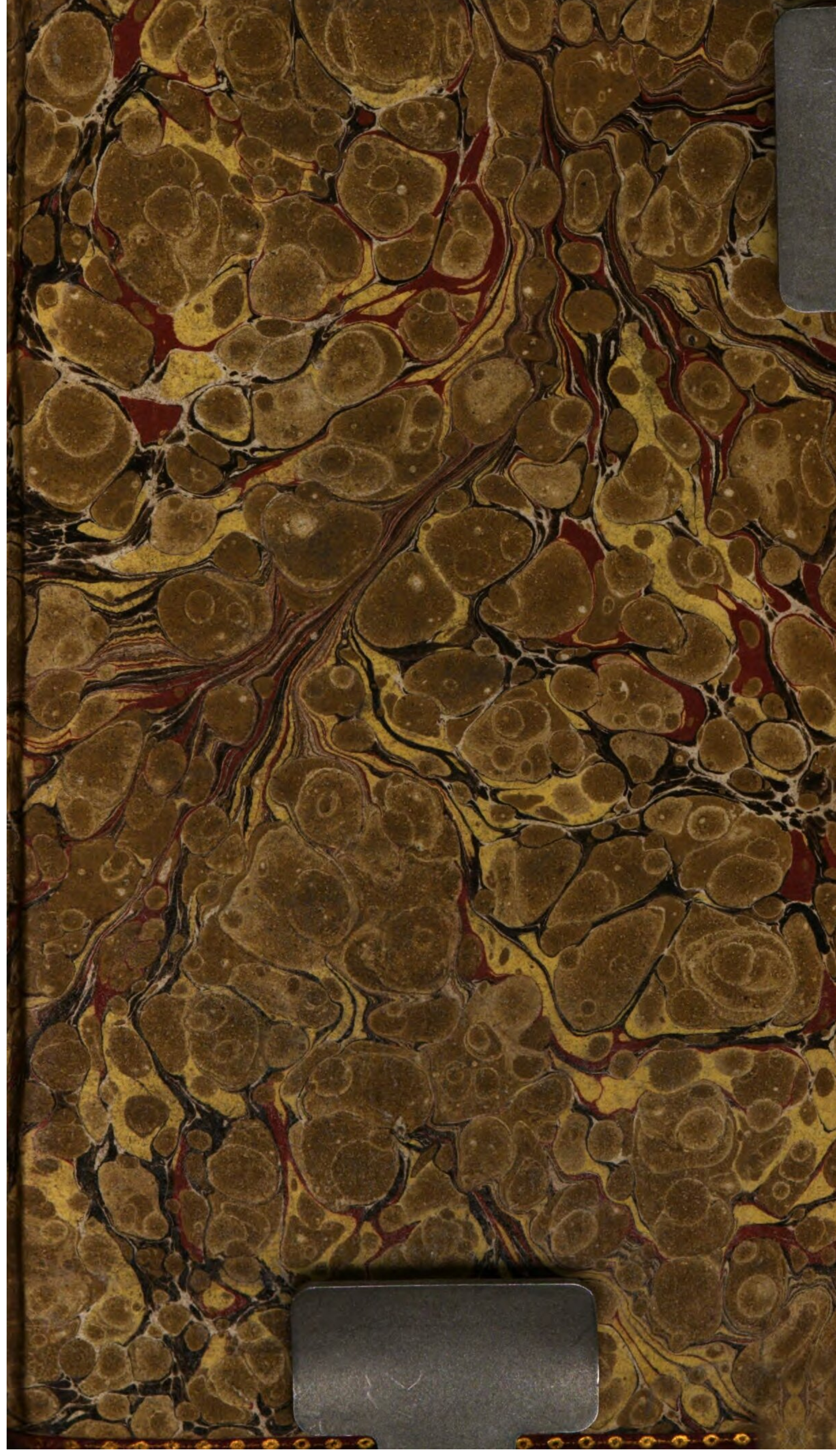
F. 77.



F. 76.









Hauff, Johann K.

Lehrbegriff der reinen Mathematik

Frankfurt am Main 1803

Math.p. 205

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081936-4